МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ

11

класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Методические рекомендации к учебнику
А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

2-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21
Б94

Пособие содержит примерное планирование учебного материала, методические рекомендации к каждому параграфу, комментарии к упражнениям и контрольные работы.

Учебное издание

Буцко Елена Владимировна
Мерзляк Аркадий Григорьевич
Полонский Виталий Борисович
Якир Михаил Семёнович

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
Геометрия
11 класс

Углублённый уровень

Методические рекомендации к учебнику А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. Б. Полякова

Центр математики
Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Дата подписания к использованию 15.02.2023.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**

ISBN 978-5-09-108887-8

От авторов

Данное методическое пособие адресовано учителям, работающим по учебнику «Геометрия. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка, Д. А. Номировского, В. М. Полякова.

Цель пособия — помочь учителю наиболее эффективно организовывать, осуществлять и контролировать учебный процесс на уроках геометрии в 11 классе.

В разделе **«Поурочное планирование учебного материала»** представлено распределение учебного времени по изучаемым темам с учётом часов, выделенных на контрольные работы. Раздел **«Методические рекомендации по организации учебной деятельности»** состоит из технологических карт по каждой теме курса, за исключением контрольных работ. В технологической карте обозначены планируемые результаты, основные понятия, изучаемые на уроке, примерные задания для каждого урока данной темы, а также даны методические комментарии к тексту соответствующего параграфа учебника и некоторым упражнениям. Задания для формирования предметных результатов, дополнительные задания, задания для повторения, задания для домашней работы указаны из учебника «Геометрия. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др.; задания для контроля и коррекции предметных результатов указаны из пособия «Самостоятельные и контрольные работы. Геометрия. 11 класс» авторов А. Г. Мерзляка и др. Дополнительные задания можно использовать для индивидуальной, парной или групповой работы учащихся, а также во внеурочной деятельности. Технологические карты являются эффективной помощью учителю при организации учебной деятельности, при этом нужно учитывать, что выполнение объёма заданий на уроке и дома должно корректироваться учителем в зависимости уровня математической подготовки учащихся. Раздел **«Контрольные работы»** состоит из 6 контрольных работ в соответствии с планированием учебного материала. Каждая работа содержит 4 варианта. Такой обширный материал поможет учителю организовать объективный и эффективный контроль знаний. В разделе **«Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся»** представлены методы контроля в учебном процессе. В разделе **«Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся»** предлагаем технологическую карту урока, на котором используются ИКТ. В раздел **«Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся»** включены технологические карты организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности, критерии оценки этой деятельности.

Поурочное планирование учебного материала

(3 часа в неделю, всего 105 часов)

№ параграфа	Номера уроков	Содержание учебного материала	Количество часов
		Глава 1. Координаты и векторы в пространстве	**23**
1	1, 2	Декартовы координаты точки в пространстве	3
2	3, 4	Векторы в пространстве	2
3	5, 6	Сложение и вычитание векторов	3
4	7—9	Умножение вектора на число. Гомотетия	5
5	10—12	Скалярное произведение векторов	5
6	13—15	Уравнение плоскости	4
	16	Контрольная работа № 1	1
		Глава 2. Тела вращения	**37**
7	17—19	Цилиндр	3
8	20, 21	Комбинации цилиндра и призмы	3
9	22—24	Конус	3
10	25, 26	Усечённый конус	2

11	27—29	Комбинации конуса и пирамиды	4
	30	Контрольная работа № 2	1
12	31, 32	Сфера и шар. Уравнение сферы	3
13	33—35	Взаимное расположение сферы и плоскости	4
14	36—38	Многогранники, вписанные в сферу	4
15	39—41	Многогранники, описанные около сферы	4
16	42—44	Тела вращения, вписанные в сферу	2
17		Тела вращения, описанные около сферы	3
	45	Контрольная работа № 3	1
Глава 3. Объёмы тел. Площадь сферы			**19**
18	46—48	Объём тела. Формула для вычисления объёма призмы	4
19	49—53	Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды	6
	54	Контрольная работа № 4	1
20	55—59	Объёмы тел вращения	5
21	60, 61	Площадь сферы	2
	62	Контрольная работа № 5	1

Окончание

Номер параграфа	Номера уроков	Название параграфа	Количество часов
Повторение и систематизация учебного материала			**26**
	63—69	Повторение и систематизация учебного материала за курс планиметрии	15
		Повторение и систематизация учебного материала за курс стереометрии	10
	70	Контрольная работа № 6	1

Методические рекомендации по организации учебной деятельности

Глава 1. Координаты и векторы в пространстве

§ 1. Декартовы координаты точки в пространстве

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием декартовой системы координат в пространстве, находить расстояние между двумя точками по их координатам, определять координаты середины отрезка по координатам его концов, определять координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, по координатам его концов. ***Личностные:*** формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием декартовой системы координат в пространстве, находить расстояние между двумя точками по их координатам, определять координаты середины отрезка по координатам его концов, определять координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, по координатам его концов.
Основные понятия	Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве, начало координат, ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, координатные плоскости, координатное пространство, абсцисса, ордината, аппликата, координата точки, формула расстояния между двумя точками, формулы координат середины отрезка, формулы координаты точки, делящей отрезок в данном отношении.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	1.1, 1.2, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9				1.4, 1.6, 1.8, 1.10
2	1.11, 1.13, 1.15, 1.18, 1.22, 1.24	1.16, 1.20, 1.25, 1.27, 1.28	1.46		1.12, 1.14, 1.17, 1.19, 1.23
3	1.30, 1.36, 1.38, 1.40, 1.42, 1.44	1.32, 1.34, 1.43	1.47	Самостоятельная работа № 1: № 1, 3	1.31, 1.37, 1.39, 1.41, 1.45

Методические комментарии

Данный параграф содержит определение декартовой системы координат в пространстве и основных понятий, связанных с ней. Учащиеся должны понять, как изображаются точки с заданными координатами в декартовой системе координат, а также иметь представление об обратной задаче: по местоположению точки в пространстве определять её координаты. На основании определений учащиеся должны:

- знать названия координатных осей, обозначения координатных плоскостей;
- знать, каковы особенности координат точек, принадлежащих каждой из координатных осей и координатных плоскостей;
- иметь представление о том, что если плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, то все точки, принадлежащие этой плоскости, имеют одно и то же значение одной из координат.

Эта тема сложнее, чем аналогичная тема «Декартовы координаты на плоскости», в первую очередь за счёт того, что изображение трёхмерной системы координат на рисунках уже является условным (в отличие от двумерной). Можно продемонстрировать учащимся несколько возможных вариантов расположения координатных осей:

1) обсудить рисунок 1.2 учебника, где оси y и z расположены в плоскости, перпендикулярной взгляду наблюдателя, ось x — под равными углами к этим осям (рис. 1);

2) предложить другой способ: оси x, y, z расположены так, как показано на рисунке 2 (так называемая «изометрическая» проекция в черчении).

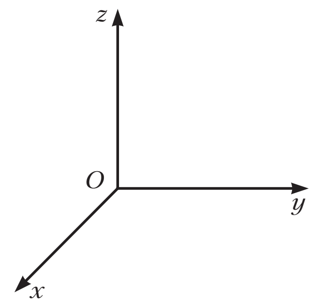

Рис. 1

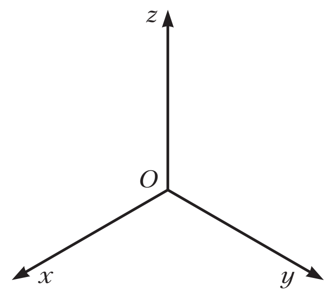

Рис. 2

Можно выбирать расположение осей на своё усмотрение с учётом того, что рисунок должен получиться как можно более наглядным. Однако в зависимости от того, как расположены оси, надо делать выводы о том, какие элементы фигур изображены без искажений, а какие претерпели изменения (и какие именно).

Так, на рисунке 1 плоские фигуры, находящиеся в плоскости yz (а также в плоскостях, параллельных ей), будут изображены без искажений, зато длины изображений отрезков, параллельных оси x, будут не равны длинам изображений таких же отрезков, расположенных в плоскости yz.

На рисунке 2, как бы ни была расположена плоская фигура, она всё равно будет искажена: при таком изображении углы не сохраняются. Зато длины отрезков, расположенных вдоль всех координатных осей, будут равны, т. е. сохраняются линейные размеры фигур.

В любом случае, при построении изображения декартовой системы координат на плоской поверхности принято соблюдать принципы параллельного проектирования. А значит, и при изображении объектов в декартовой системе координат следует придерживаться двух основных принципов:

- сохраняется параллельность;
- сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Полезно предложить учащимся изобразить несколько геометрических тел, изученных в курсе 10 класса, в декартовой системе координат.

Учащиеся должны усвоить, что тройка чисел, представляющая собой координаты точки, является упорядоченной. В частности, следует сообщить учащимся, что, кроме терминов «абсцисса, ордината и аппликата точки», используются высказывания «первая, вторая и третья координата», и поскольку тройка координат является упорядоченной, то такая отсылка к ним является корректной и однозначной.

Здесь же следует ознакомить учащихся с терминологией «двумерное пространство», «трёхмерное пространство» и подчеркнуть, что такое название связано с количеством координатных осей, формирующих пространство, и соответственно — с количеством координат, описывающих каждую точку пространства.

Теоремы 1.1 и 1.2 предоставляют математический аппарат для нахождения длины отрезка и середины отрезка, заданного координатами своих концов.

Из курса планиметрии учащиеся знают, как находить координаты точки пересечения медиан треугольника, если известны координаты его вершин. Ключевая задача 1 параграфа является пространственным аналогом этой планиметрической задачи. Эта задача является хорошим мотивом, чтобы поговорить вообще о центроиде системы, состоящей из n точек, и мотивом для участия в проекте «Геометрия масс».

Комментарии к упражнениям

Упражнения этого параграфа несложны. В основном они базируются на определениях и теоремах 1.1 и 1.2 и предназначены для закрепления навыков задания точек и отрезков их координатами, а также формирования навыков поиска неизвестных точек в тех случаях, когда известны некоторые из их координат и известно условие, которым можно связать известные и неизвестные координаты. Исходя из изученного в данном параграфе материала (теорем 1.1 и 1.2), в качестве таких условий выбирается расстояние до заданной точки, равноудалённость от двух заданных точек и т. п., т. е. учащиеся должны записать уравнение (систему уравнений) на основании формул, выведенных в теоремах 1.1 и 1.2, в котором неизвестными величинами являются одна или несколько координат точек.

№ 1.30. Здесь учащиеся должны выбрать наиболее удобный из признаков прямоугольника, исходя из предложенного инструментария доказательства. Вначале учащиеся должны доказать, что этот четырёхугольник является параллелограммом, а затем использовать признак «диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам».

№ 1.34. Воспользоваться тем, что три середины сторон треугольника и одна из его вершин являются вершинами параллелограмма, а далее учесть, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Возможно и другое решение. Если обозначить вершины A, B, C и считать, что D — середина AB, E — середина BC и F — середина AC, то можно записать систему таких уравнений: $\frac{x_a + x_b}{2} = -1$, $\frac{x_b + x_c}{2} = 5$, $\frac{x_a + x_c}{2} = 3$.

№ 1.43. Если ввести систему координат так, что точка A — начало координат, D (1; 0; 0), B (0; 1; 0) и A_1 (0; 0; 1), то получим M (0; 0; z), N (x; 1; 1) и K (1; y; 0), где числа x, y и z принадлежат промежутку [0; 1]. Теперь задача сводится к поиску наименьшего значения выражения $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 2y - 2z + 6$.

№ 1.44. Решение этой задачи (как и задачи 1.45) носит пропедевтический характер к теме «Уравнение плоскости». Если ввести систему координат так, что B — начало координат, C (4; 0; 0), A (0; 2; 0) и B_1 (0; 0; 6), то получим D_1 (4; 2; 6). Тогда координаты точки M удовлетворяют таким условиям: $x^2 + y^2 + z^2 = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 6)^2$, $x = 0$, $z = 6$.

§ 2. Векторы в пространстве

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием вектора в пространстве, а также основными понятиями, связанными с определением вектора, определять координаты вектора, заданного координатами его начала и конца; сравнивать векторы, заданные координатами; находить модуль вектора, заданного координатами. ***Личностные:*** формировать умение представлять результат своей деятельности. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием вектора в пространстве, а также основными понятиями, связанными с определением вектора, определять координаты вектора, заданного координатами его начала и конца; сравнивать векторы, заданные координатами; находить модуль вектора, заданного координатами.
Основные понятия	Направленный отрезок (вектор), нулевой вектор (нуль-вектор), коллинеарные векторы, сонаправленные векторы,

противоположно направленные векторы, равные векторы, вектор, отложенный от точки, компланарные векторы, координаты вектора, нахождение длины вектора по его координатам, параллельный перенос.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9		2.30		2.4, 2.6, 2.8, 2.10
2	2.11, 2.13, 2.15, 2.17, 2.20, 2.26, 2.28	2.19, 2.22, 2.24	2.31	Самостоятельная работа № 2: № 1, 2	2.12, 2.14, 2.16, 2.18, 2.21, 2.27, 2.29

Методические комментарии

Данный параграф начинает изучение векторов в пространстве. При изучении этого параграфа важно донести до учащихся такую основную идею. Векторы в пространстве не являются совершенно новыми математическими объектами для учащихся, аналогичные объекты уже были рассмотрены в двумерном пространстве, а сейчас такие же объекты рассматриваются в трёхмерном пространстве.

В зависимости от уровня класса можно описать этот переход более строго с математической точки зрения: двумерное пространство (плоскость xy) является подмножеством трёхмерного (т. е. теми и только теми точками трёхмерного пространства, третья координата которых равна нулю). Поэтому фактически в предыдущих классах мы изучали подмножество векторов трёхмерного пространства, третья координата которых равна нулю. Можно привести эти объяснения после того, как в этом параграфе будет введено понятие координат для вектора в пространстве.

Следует обратить внимание учащихся на первый абзац параграфа. В нём обосновывается то, что свойства, изученные ранее для векторов на плоскости, для векторов в пространстве будут просто сформулированы, но не будут отдельно рассматриваться и доказываться. Такой подход объясняется тем, что на самом деле большинство свойств векторов в двумерном пространстве — это соответствующие свойства векторов трёхмерного пространства для частного случая — векторов, третья координата которых равна нулю, и в общем случае принципы и алгоритмы доказательств для двумерного и трёхмерного пространства совпадают. Для демонстрации этого утверждения можно свести теорему 2.1 данного параграфа к соответствующей теореме курса планиметрии тем, что применить её к точкам с координатами $A\ (x_1;\ y_1;\ 0)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ 0)$.

Поскольку для большинства изучаемых далее теорем о свойствах векторов в пространстве доказательства опущены, у учащихся может сложиться впечатление о том, что эти свойства доказывать не надо вообще. Для профилактики такого впечатления следует при рассмотрении таких свойств постоянно проводить аналогии с ранее изученным материалом о векторах на плоскости, а также в порядке актуализации знаний и повторения материала предлагать учащимся воспроизвести общую идею доказательства соответствующих теорем планиметрии.

В данном параграфе вводится понятие параллельного переноса в пространстве на некоторый вектор. С одной стороны, учащиеся легко воспримут идею о том, что параллельный перенос хорошо описывать с помощью вектора. С другой стороны, такое определение формирует обоснования для того, чтобы в дальнейшем применять метод координат для выполнения геометрических преобразований в пространстве.

Поскольку параллельный перенос является движением, то, как учащимся уже известно, он сохраняет равенство фигур. Примеры, приведённые в этом параграфе, демонстрируют, что понятие параллельного переноса помогает объяснить и подтвердить ранее изученные свойства двугранных углов и призм.

Для большей наглядности следует предложить учащимся при обсуждении рисунка 2.6 назвать вектор $\vec{a}$, о котором идёт речь, указав его начало и конец с использованием обозначений вершин призмы. Очевидным ответом будет «вектор $\overrightarrow{AA_1}$». Следует добиться от учащихся понимания того, что в данном случае можно назвать любой из векторов, представленных рёбрами призмы, т. е. искомыми векторами будут также и $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$.

Следует обратить внимание учащихся на текст под определением равных векторов. Он фактически даёт разъяснение тому, что вектором является не один отдельно взятый направленный отрезок, а система равных направленных отрезков, а эту систему для удобства представляет один, причём любой, из её элементов.

В параграфе вводится понятие, не имеющее планиметрического аналога, — это компланарные векторы. Предложенное определение учитывает все случаи взаимного расположения компланарных векторов: они могут быть параллельны некоторой плоскости или некоторые из них принадлежать этой плоскости. Следует обратить внимание учащихся на отсутствие в определении ограничения не быть вектору нулевым. Приведённое определение учитывает и этот случай.

Комментарии к упражнениям

№ 2.24—2.25. Решение этих задач можно обобщить, записав общую формулу, связывающую координаты точек образа и прообраза при параллельном переносе.

§ 3. Сложение и вычитание векторов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием суммы векторов, применять правила треугольника, параллелограмма и параллелепипеда для сложения векторов, применять свойства сложения векторов, доказывать и применять правила сложения и вычитания векторов, заданных координатами. ***Личностные:*** формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию. ***Метапредметные:*** формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятием суммы векторов, применять правила треугольника, параллелограмма и параллелепипеда для сложения векторов, применять свойства сложения векторов, доказывать и применять правила сложения и вычитания векторов, заданных координатами.
Основные понятия	Сумма векторов, правило треугольника, правило сложения векторов, заданных координатами, свойства сложения векторов, разность векторов, правило параллелограмма, правило параллелепипеда, разность векторов, правило вычитания векторов, заданных координатами, противоположные векторы.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	3.1, 3.3, 3.5, 3.7, 3.9		3.35		3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10
2	3.11, 3.13, 3.14, 3.16, 3.18, 3.22	3.20, 3.24			3.12, 3.15, 3.17, 3.19, 3.23
3	3.26, 3.28, 3.30, 3.32, 3.34		3.36	Самостоятельная работа № 3: № 1, 3	3.27, 3.29, 3.33

Методические комментарии

Правила сложения и вычитания векторов в пространстве, правило треугольника и правила нахождения суммы (разности) векторов, представленных своими координатами, аналогичны соответствующим правилам для случая векторов в двумерном пространстве. Для освоения этих правил в трёхмерном пространстве достаточно, чтобы учащиеся выполнили соответствующее количество упражнений.

Новым в данном параграфе является правило параллелепипеда. В свою очередь, оно является аналогом правила параллелограмма в двумерном пространстве. Следует обратить внимание на то, что оно применимо только при том условии, что три складываемых вектора (и любые векторы, им равные) не лежат в одной плоскости.

При обсуждении рисунка 3.5 рассуждения основываются на том, что четырёхугольник $OCDK$ — параллелограмм. Следует обосновать это утверждение, напомнив, что диагональное сечение призмы — параллелограмм, а четырёхугольник $OCDK$ является диагональным сечением рассматриваемого параллелепипеда.

Определение противоположных векторов и теорема 3.3 позволяют свести вычитание векторов к сложению с противоположным вектором.

Отдельно следует рассмотреть нулевой вектор в операциях сложения и вычитания векторов.

В предыдущем параграфе было определено, что нулевой вектор направления не имеет. Однако для того, чтобы можно было, пользуясь свойствами векторов, чисто формально выполнять операции с векторами по тем же правилам, что и преобразования алгебраических выражений, мы должны иметь право, обнаружив в цепочке вычислений операцию «вычесть вектор $\vec{a}$», заменить её на операцию «прибавить вектор $(-\vec{a})$». Исходя из этих соображений принята договорённость о том, что вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Говоря о сложении трёх и более векторов, приводится равенство $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$, которое иногда называют правилом многоугольника для сложения векторов.

Комментарии к упражнениям

№ 3.28. Рассмотрите разность левой и правой частей доказываемого равенства.

№ 3.30. Имеем: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B_1D} - \overrightarrow{B_1C}$.

№ 3.32. Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

№ 3.34. Эта задача является координатно-векторной интерпретацией неравенства треугольника. Надо обратить внимание учащихся на возможность обобщения этого неравенства для трёх и более векторов. Также с целью установления межпредметных связей можно предложить учащимся задачу на применение данного неравенства. Например, докажите неравенство $\sqrt{1 - x^2 + y^2 + 2 - z^2} + \sqrt{x^2 + 1 - y^2 + z^2} \geqslant 6$.

§ 4. Умножение вектора на число. Гомотетия

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение умножать вектор на число; доказывать и применять свойство коллинеарных векторов, правило умножения вектора, заданного координатами, на число, необходимое и достаточное условия компланарности трёх векторов, разложение вектора по трём данным некомпланарным векторам; применять свойства умножения вектора на число, применять метод координат для решения задач, оперировать понятием «гомотетия», применять свойства гомотетии. ***Личностные:*** формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения. ***Метапредметные:*** формировать умение определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить

логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится умножать вектор на число; доказывать и применять свойство коллинеарных векторов, правило умножения вектора, заданного координатами, на число, необходимое и достаточное условия компланарности трёх векторов, разложение вектора по трём данным некомпланарным векторам; применять свойства умножения вектора на число, применять метод координат для решения задач, оперировать понятием «гомотетия», применять свойства гомотетии.

Основные понятия

Умножения вектора на число, свойство коллинеарных векторов, свойства умножения вектора на число, необходимое и достаточное условия компланарности трёх векторов, разложение вектора по трём данным некомпланарным векторам, базис, разложение вектора по базису, координаты вектора в базисе, координатные векторы, метод координат, гомотетия, центр гомотетии, коэффициент гомотетии, свойства гомотетии.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополни-тельные задания**	**Задания для повто-рения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	4.1, 4.2, 4.4, 4.6, 4.8				4.3, 4.5, 4.7, 4.9
2	4.10, 4.12, 4.14, 4.16, 4.18, 4.19				4.11, 4.13, 4.15, 4.17, 4.20
3	4.21, 4.23, 4.25, 4.27, 4.29	4.28, 4.31		Самостоятельная работа № 4: 1—3	4.22, 4.24, 4.26, 4.30
4	4.33, 4.35, 4.37, 4.39, 4.40		4.50		4.34, 4.36, 4.38
5	4.41, 4.43, 4.44, 4.46	4.47		Самостоятельная работа № 5: № 1—3	4.42, 4.45, 4.49

Методические комментарии

С умножением вектора на число и свойствами этой операции учащиеся знакомы из курса планиметрии. Поэтому эта тема не вызывает затруднений у учащихся.

При обсуждении формул $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ и $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ следует напомнить договорённость, принятую в предыдущем параграфе, о том, что вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор. Поэтому эти формулы применимы к любому вектору, в том числе и к нулевому.

Теорема 4.1 является важным пропедевтическим подходом к разложению вектора по базису. Утверждение, обратное теореме 4.1, можно рассматривать как один из способов доказательства коллинеарности векторов.

В ключевой задаче 1 учащимся предлагается убедиться в том, что известное утверждение из курса планиметрии применимо к данной задаче и в пространстве. Для доказательства следует показать, что точки X, A, B и M лежат в одной плоскости, тем самым данная стереометрическая задача сводится к планиметрической, уже решённой в курсе геометрии 9 класса.

В ключевой задаче 2 приведено доказательство для произвольной точки X пространства, однако на иллюстрации приводится точка, не принадлежащая плоскости треугольника. В зависимости от уровня класса можно предложить учащимся убедиться в том, что это доказательство применимо и к случаям, когда точка X принадлежит плоскости треугольника; совпадает с одной из вершин треугольника; является точкой пересечения медиан.

В примере 2 рассмотрен метод решения задач, при котором рассматриваемая фигура размещается специальным образом в декартовой системе координат. Поставив в соответствие отдельным точкам фигуры их координаты, удалось доказать необходимое утверждение. Такой метод решения задач называют методом координат. Следует продемонстрировать учащимся преимущества этого метода, разобрав достаточное количество задач.

Далее в параграфе приводится определение преобразования гомотетии в пространстве, рассматриваются свойства гомотетии. Важными являются рассуждения, позволяющие доказать, что основания усечённой пирамиды являются гомотетичными треугольниками. Как известно, гомотетичные фигуры подобны, поэтому можно использовать подобие оснований усечённой пирамиды при решении задач.

Таким образом, на основании рассмотрения параллельного переноса и гомотетии в пространстве учащиеся могут провести аналогии: основания призмы и сечение призмы плоскостью, параллельной плоскости основания, могут быть образами и прообразами в результате параллельного переноса; основание пирамиды и сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания, могут быть образами и прообразами в результате гомотетии. Следовательно, можно использовать соответствующий векторный аппарат при решении задач.

Теорема 4.3 даёт необходимое и достаточное условия компланарности трёх векторов. Также с помощью этой теоремы доказывается теорема о разложении вектора по трём данным некомпланарным векторам. Следует обратить внимание учащихся на то, что эта теорема является планиметрическим аналогом теоремы о разложении вектора по двум данным неколлинеарным векторам. В планиметрии базис образовывали два неколлинеарных вектора, а в стереометрии три некомпланарных вектора.

Ключевые задачи 1 и 2 параграфа во многом аналогичны соответствующим задачам из планиметрии. Ключевая задача 3 является достаточным условием принадлежности четырёх точек одной плоскости.

Комментарии к упражнениям

№ 4.23. Докажите, что $\frac{OX}{OX_1} = \frac{h}{h_1}$.

№ 4.27. Докажите, что длина отрезка EF составляет две трети от длины средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC.

№ 4.39. Для произвольной точки X пространства выполняются равенства $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$ и $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1})$. Отсюда легко получить, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

№ 4.47, 4.48. Следует напомнить учащимся, что задачи такого рода рассматривались в курсе 10 класса при изучении темы «Параллельность в пространстве». Эти задачи являются хорошей иллюстрацией эффективности применения векторного метода.

§ 5. Скалярное произведение векторов

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями угла между векторами и скалярным произведение двух векторов; доказывать и применять условие перпендикулярности двух ненулевых векторов и формулу скалярного произведения двух векторов, заданных координатами; применять формулу косинуса угла между векторами, свойства скалярного произведения векторов.

Личностные: формировать интерес к изучению темы и желание применять приобретённые знания и умения.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями угла между векторами и скалярного произведения двух векторов; доказывать и применять условие перпендикулярности двух ненулевых векторов и формулу скалярного произведения двух векторов, заданных координатами; применять формулу косинуса угла меду векторами, свойства скалярного произведения векторов.

Основные понятия

Угол между векторами, перпендикулярные векторы, скалярное произведение двух векторов, скалярный квадрат, условие перпендикулярности двух ненулевых векторов, формула скалярного произведения двух векторов, заданных координатами, формула косинуса угла меду векторами, свойства скалярного произведения векторов.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополни-тельные задания**	**Задания для повто-рения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.9	5.7	5.54		5.4, 5.6, 5.10
2	5.11, 5.14, 5.16, 5.20, 5.22, 5.24	5.13, 5.18			5.12, 5.15, 5.17, 5.21, 5.23, 5.25
3	5.26, 5.28, 5.30, 5.32, 5.34				5.27, 5.29, 5.31, 5.33, 5.35
4	5.36, 5.39, 5.41, 5.43	5.38			5.37, 5.40, 5.42, 5.44
5	5.45, 5.47, 5.49, 5.52	5.50, 5.53	5.55	Самостоятельная работа № 6: № 1—3	5.46, 5.48, 5.51

Методические комментарии

Понятия угла между векторами, скалярного произведения векторов и свойства скалярного произведения векторов известны учащимся из курса планиметрии. Более того, поскольку в этих определениях идёт речь о двух векторах, а любые два вектора можно совместить так, чтобы они имели общее начало, то получается, что векторы лежат в одной плоскости, а следовательно, для них полностью применимы определения из курса планиметрии.

Новыми в этой теме являются формулы, в которых используются координаты векторов в трёхмерном (а не двумерном) пространстве.

В определении угла между векторами для случая, когда хотя бы один из них нулевой, следует обратить внимание на такую особенность. О нулевом векторе говорится, что он направления не имеет, поэтому использовать слова «сонаправлен с некоторым вектором» по отношению к нулевому вектору некорректно. В то же время говорить о том, что нулевой вектор «образует с некоторым вектором угол, равный нулю», — корректно.

Введение операции скалярного произведения векторов и рассмотрение её свойств завершает формирование математического аппарата работы с векторами и преобразования выражений, содержащих векторы, по тем же правилам, что преобразование алгебраических выражений.

Теорема 5.1 предоставляет очень удобный аппарат для доказательства того, что векторы перпендикулярны. Теорема 5.2 позволяет легко найти скалярное произведение векторов, заданных координатами. Следовательно, для доказательства перпендикулярности двух векторов достаточно записать их скалярное произведение и убедиться в том, что оно равно нулю. Поскольку учащиеся уже умеют задавать отрезки в декартовом пространстве с помощью координат их концов, то этот аппарат можно использовать для доказательства перпендикулярности прямых и отрезков в пространстве. Обсуждая эту тему, следует вернуться к тому, что с помощью векторов можно доказывать и параллельность прямых. Это является ещё одним аргументом для демонстрации эффективности метода координат.

В примере 1 надо обратить внимание на то, что в условии говорится об <u>отрезках</u> AA_1 и BC. В решении же мы доказываем перпендикулярность <u>векторов</u> $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Таким образом, мы можем находить угол между прямыми, находя угол между векторами, лежащими на этих прямых. Однако при этом следует обратить внимание на то, что угол между векторами находится в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, а угол между прямыми — в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$. Это следует учитывать при решении задач: если угол между векторами более $90°$, то угол между прямыми, на которых лежат эти векторы, равен $180°$ минус угол между векторами.

Несмотря на то, что в задаче 2 параграфа рассматривается конкретный многогранник с определённым расположением скрещивающихся прямых, в ней показан общий метод поиска угла и расстояния между скрещивающимися прямыми с помощью векторов. Учащимся следует применять этот метод тогда, когда не удаётся найти чисто геометрические методы для поиска указанных величин.

Комментарии к упражнениям

№ 5.20. Следует найти модули векторов $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, предварительно найдя их скалярные квадраты. Далее найти скалярное произведение этих векторов и воспользоваться теоремой 5.4.

№ 5.22. Для нахождения скалярного произведения не следует раскрывать скобки. Гораздо удобней найти координаты векторов $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$, а дальше воспользоваться теоремой 5.2.

№ 5.30. Из условия задачи следует, что $(4\vec{m} - 5\vec{n})(2\vec{m} + \vec{n}) = 0$. Далее следует раскрыть скобки и воспользоваться условием $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$.

№ 5.44. В качестве базисных выберите векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$. Тогда можно записать $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DD_1} + k\overrightarrow{DA}$. Значение k можно найти из условия $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{D_1O} = 0$.

№ 5.48. Возводя в скалярный квадрат обе части равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NB}$, следует учесть, что возможны два случая: угол между векторами $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{NB}$ равен $60°$ или угол между этими векторами равен $120°$.

№ 5.52. Пусть точки F и E — середины отрезков MP и NK соответственно. Тогда из ключевой задачи 4.40 следует, что $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PK})$. Далее возведите обе части записанного равенства в скалярный квадрат.

§ 6. Уравнение плоскости

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием «уравнение фигуры на координатной плоскости», выводить и использовать уравнение плоскости.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием «уравнение фигуры на координатной плоскости», выводить и использовать уравнение плоскости.

Основные понятия Уравнение фигуры в координатном пространстве, вектор нормали, уравнение плоскости.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополни-тельные задания**	**Задания для повто-рения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	6.1, 6.2, 6.4, 6.6, 6.8				6.3, 6.5, 6.7, 6.9
2	6.10, 6.12, 6.14, 6.15, 6.17, 6.19		6.32		6.11, 6.13, 6.16, 6.18
3	6.20, 6.22, 6.24		6.33		6.21, 6.23, 6.25
4	6.26, 6.29 6.30,	6.27		Самостоя-тельная работа № 7: № 1, 2	6.28, 6.31

Методические комментарии

Учащиеся знакомы с понятием ГМТ на плоскости и уравнением фигуры в двумерной декартовой системе координат из курса планиметрии. Эти же понятия применимы и для точек пространства, и для трёхмерной системы координат. С понятием ГМТ пространства учащиеся ознакомились в 10 классе.

Важно напомнить учащимся, что не всякая геометрическая фигура представляет собой геометрическое место точек. Вид фигуры, являющейся ГМТ, формируется с помощью наперёд заданного свойства её точек, причём это свойство должно быть присуще всем точкам рассматриваемой фигуры.

Понятия ГМТ и уравнения фигуры тесно связаны. Действительно, задав ГМТ свойством «удовлетворять некоторому уравнению», мы получаем, что ГМТ — это фигура, заданная этим уравнением.

В данном параграфе рассмотрены две фигуры, которые можно представить как ГМТ: плоскость и биссектор угла.

Теоремы 6.1 предоставляют очень важный математический аппарат для описания плоскостей в пространстве. Важно добиться понимания в необходимости доказательства двух взаимно обратных теорем.

Заметим, что важен и такой факт: каждое уравнение вида $ax + by + cz + d = 0$, где параметры a, b и c не равны нулю одновременно, является уравнением некоторой плоскости. Это утверждение предложено доказать учащимся самостоятельно. После доказательства теоремы 6.1 это сделать несложно. Учащиеся должны понимать причину введения ограничения: a, b и c не равны нулю одновременно.

Следует обратить внимание на то, что плоскость имеет бесконечно много векторов нормали. Все эти векторы коллинеарны, поэтому их различные координаты не изменяют уравнение плоскости вида $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

В параграфе рассматривается несколько способов задания прямой в пространстве. Полученный результат может оказаться непривычным для учащихся в том смысле, что не получен результат в виде уравнения вида $P(x; y; z) = 0$. Здесь следует подчеркнуть, что фигуру в пространстве можно задавать не только уравнением с двумя переменными.

Комментарии к упражнениям

№ 6.1. Вначале следует найти координаты вектора $\overrightarrow{BC}$.

№ 6.6. Вначале надо найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ и координаты середины отрезка MN.

№ 6.16. Уравнение плоскости, параллельной оси x, имеет вид $by + cz + d = 0$.

Контрольная работа № 1

Глава 2. Тела вращения

§ 7. Цилиндр

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями цилиндра и его элементов, находить элементы цилиндра, находить площадь боковой поверхности цилиндра и площадь полной поверхности цилиндра.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями цилиндра и его элементов, находить элементы цилиндра, находить площадь боковой поверхности цилиндра и площадь полной поверхности цилиндра.

Основные понятия

Цилиндр, боковая поверхность цилиндра, основания цилиндра, образующая цилиндра, ось цилиндра, высота цилиндра, поворот, направление поворота, ось вращения, тело вращения, осевое сечение цилиндра, касательная плоскость к цилиндру, развёртка цилиндра, площадь боковой поверхности цилиндра, площадь полной поверхности цилиндра.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	7.1, 7.3, 7.5, 7.7	7.8	7.36		7.2, 7.4, 7.6
2	7.10, 7.12, 7.14, 7.15, 7.18	7.16, 7.19	7.37		7.11, 7.13, 7.17
3	7.21, 7.23, 7.24, 7.25, 7.32, 7.33	7.26, 7.28, 7.30, 7.35		Самостоятельная работа № 8: № 1, 2	7.22, 7.27, 7.34

Методические комментарии

Понятие цилиндра и его элементов знакомо учащимся из предыдущих классов. Ранее цилиндр был представлен как результат вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон. Здесь приводится иное определение, в котором рассматривается параллельный перенос оснований цилиндра на вектор, перпендикулярный плоскости оснований.

Поскольку учащиеся уже знакомы с преобразованиями в пространстве, то в этом параграфе даётся представление об оси симметрии и плоскости симметрии цилиндра. При этом в учебнике в качестве плоскости симметрии цилиндра рассмотрено только осевое сечение цилиндра. Следует задать учащимся вопрос, есть ли у цилиндра ещё плоскости симметрии. Наводящим вопросом может быть: «Сколько осей симметрии есть у прямоугольника?» Учащиеся должны прийти к выводу, что плоскость, параллельная основаниям цилиндра и проходящая через середину его высоты, также является плоскостью симметрии цилиндра. Причём если рассматривать цилиндр как результат вращения некоторого прямоугольника, то эта плоскость образована вращением одной из осей симметрии прямоугольника.

В этом параграфе учащиеся знакомятся с новым преобразованием фигуры в пространстве — поворот вокруг прямой. Это понятие вводится на наглядном уровне. Определение тела вращения носит описательный характер.

Обсуждая рисунок 7.8, следует обратить внимание на то, что одна из сторон боковой развёртки цилиндра равна $2\pi r$ потому, что эта сторона прямоугольника фактически является «развёрнутой» окружностью основания цилиндра.

В теоретической части параграфа описано построение сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, но не проходящей через неё. Также есть немало задач на эту тему. Следует при решении первой же задачи обсудить с учащимися, какая фигура является таким сечением. Учащиеся должны прийти к выводу, что это прямоугольник. Для поиска сторон этого прямоугольника, принадлежащих основаниям цилиндра, используется тот же математический аппарат, что при поиске длин хорд окружности.

Комментарии к упражнениям

№ 7.23. Проведите образующую BB_1 цилиндра. Легко установить, что $AB_1 = 12$ см. Искомое расстояние равно расстоянию от центра основания цилиндра до хорды AB_1.

№ 7.28. Проведённое сечение является прямоугольником. Одна сторона прямоугольника — это хорда окружности. Её легко найти из условия задачи. Далее, зная одну из сторон прямоугольника и его диагональ, находим вторую сторону прямоугольника, являющуюся образующей цилиндра.
№ 7.32. При решении нет необходимости рассматривать всевозможные положения треугольника ABC. Здесь двухвариантный ответ получается в результате того, что составленное уравнение имеет два корня, удовлетворяющих условию задачи. Тем не менее полученное решение следует наглядно проиллюстрировать.
№ 7.33. Пусть точка F — середина хорды AB. Тогда прямые CF и AB перпендикулярны. Теперь ясно, что прямая KB перпендикулярна плоскости CMF, а значит, и прямой MF. Поскольку прямые MF и AD параллельны, то диагонали KB и AD прямоугольника $AKDB$ перпендикулярны.

§ 8. Комбинации цилиндра и призмы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями призмы, вписанной в цилиндр, и призмы, описанной около цилиндра, использовать свойства взаимного расположения цилиндра и призмы. ***Личностные:*** формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью. ***Метапредметные:*** формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями призмы, вписанной в цилиндр, и призмы, описанной около цилиндра, использовать свойства взаимного расположения цилиндра и призмы.
Основные понятия	Призма, вписанная в цилиндр; призма, описанная около цилиндра.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополни-тельные задания	Задания для повто-рения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.8	8.6, 8.10	8.31		8.3, 8.7, 8.9, 8.11
2	8.12, 8.14, 8.16, 8.19, 8.21	8.17	8.32		8.13, 8.15, 8.18, 8.20, 8.22
3	8.23, 8.25, 8.27, 8.29			Самостоя-тельная работа № 9: № 1, 3	8.24, 8.26, 8.28, 8.30

Методические комментарии

В данном параграфе впервые встречается понятие «геометрическое тело, вписанное в другое тело». Надо обратить внимание учащихся на то, что общего определения для такой ситуации не предоставляется, для каждого вида описанного и каждого вида вписанного тела определение будет сформулировано отдельно.

Для цилиндра, вписанного в призму, недостаточно того, чтобы основания цилиндра принадлежали основаниям призмы. Требуется, чтобы основание призмы было именно многоугольником, описанным около основания цилиндра, т. е. основание цилиндра должно касаться каждого из рёбер основания призмы, а следовательно, для каждой из боковых граней существует одна (и только одна) образующая цилиндра, принадлежащая этой грани.

В этом и следующих параграфах при введении определения новой пары тел, одно из которых вписано в другое, следует детально рассмотреть аналогичные особенности их взаимного расположения.

Подчёркивается, что вписать в цилиндр и описать вокруг цилиндра можно не всякую призму. Указано, какими свойствами должна обладать призма, чтобы её можно было вписать в цилиндр либо описать около цилиндра. Учащиеся должны осознать, чем обоснованы эти свойства, и в дальнейшем применять эту информацию при решении задач.

Следует обсудить с учащимися факт, полезный для решения задач: боковая грань призмы, вписанной в цилиндр, является сечением цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра.

Определение площади боковой поверхности цилиндра как площади развёртки его боковой поверхности является нестрогим, поскольку понятие самой развёртки дано нестрого. Поэтому в параграфе предложен ещё один путь введения этого понятия. Этот подход имеет планиметрический аналог — определение площади круга как предела последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в круг. Поэтому естественно определить площадь боковой поверхности цилиндра как предел последовательности боковых поверхностей правильных призм, вписанных в цилиндр.

Особое внимание следует уделить задаче 1, разобранной в параграфе. Решение этой задачи направлено на устранение распространённой ошибки: считать, что центр описанной окружности многоугольника всегда принадлежит внутренней области многоугольника. Однако это не так.

Комментарии к упражнениям

№ 8.16. Поскольку вокруг данной призмы можно описать цилиндр, то данная призма является прямой. Поэтому данный угол β — это угол между диагональю грани и гипотенузой.

№ 8.21. Ввести сторону ромба. Выразить через эту сторону и данную величину S высоту цилиндра и его радиус основания.

№ 8.27. Следует рассмотреть два случая: центр основания цилиндра принадлежит основанию призмы и центр основания цилиндра не принадлежит основанию призмы.

№ 8.30. Прямая DC_1 перпендикулярна плоскости A_1D_1CB. Центр O грани ABB_1A_1 является проекцией точки A на эту плоскость. Воспользуйтесь тем, что точки O, B и D_1 принадлежат окружности основания цилиндра.

§ 9. Конус

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием конуса и его элементов, находить элементы конуса, находить площадь боковой поверхности конуса и площадь полной поверхности конуса.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты Учащийся научится оперировать понятием конуса и его элементов, находить элементы конуса, находить площадь боковой поверхности конуса и площадь полной поверхности конуса.

Основные понятия Конус, боковая поверхность конуса, основание конуса, образующая конуса, вершина конуса, ось конуса, высота конуса, осевое сечение конуса, развёртка конуса, касательная плоскость к конусу, площадь боковой поверхности конуса, площадь полной поверхности конуса.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	9.1, 9.3, 9.5	9.7			9.2, 9.4, 9.6
2	9.9, 9.12, 9.14, 9.17, 9.21	9.10, 9.15, 9.19, 9.22	9.38		9.11, 9.13, 9.16, 9.18, 9.20, 9.23
3	9.24, 9.29, 9.33, 9.35, 9.36	9.25, 9.27, 9.31, 9.37	9.39	Самостоятельная работа № 10: № 1, 2	9.26, 9.30, 9.34

Методические комментарии

Часть сведений данного параграфа уже известны учащимся из курса наглядной геометрии предыдущих классов. Данный параграф предназначен для их обобщения и систематизации.

Определение конуса проходит по такой же схеме, что и определение цилиндра: вначале определяется поверхность конуса, а затем определяется конус как тело с указанной границей.

Распространённая ошибка — считать боковую поверхность конуса конической поверхностью. Коническая поверхность не является ограниченной фигурой. Вместе с тем боковая поверхность конуса — ограниченная фигура.

Новым для учащихся является понятие сечения конуса. В учебнике рассматривается только сечение конуса, проходящее через две образующие, в частности, осевое сечение конуса. В зависимости от уровня класса учащихся можно познакомить с другими видами конических сечений.

Площадь боковой поверхности конуса определяется как площадь развёртки его боковой поверхности. То, что развёрткой боковой поверхности конуса является сектор, для учащихся будет менее очевидным, чем определение вида боковой поверхности цилиндра при рассмотрении его развёртки. Поэтому желательно продемонстрировать этот факт на модели.

Задача 2, разобранная в параграфе, демонстрирует, как можно использовать развёртку боковой поверхности конуса для поиска длины расстояний по поверхности конуса.

Комментарии к упражнениям

№ 9.25. Основание перпендикуляра, опущенного из центра основания конуса на секущую плоскость, принадлежит высоте равнобедренного треугольника, являющегося сечением конуса.
№ 9.29. Пусть длина образующей конуса равна a. Выразите через a радиус основания и высоту конуса.
№ 9.30. Воспользуйтесь тем, что треугольник ABC является равносторонним.
№ 9.31—9.32. Следует учесть, что поверхность тела вращения состоит из боковой поверхности цилиндра и двух боковых поверхностей конуса.
№ 9.34. Через точку C проведите хорду CD параллельно хорде AB. Отрезок BC является диагональю трапеции $BDCA$.

§ 10. Усечённый конус

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятием усечённого конуса и его элементов, находить элементы усечённого конуса, находить площадь боковой поверхности усечённого конуса и площадь полной поверхности усечённого конуса.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах, в окружающей жизни.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием усечённого конуса и его элементов, находить элементы усечённого конуса, находить площадь боковой поверхности усечённого конуса и площадь полной поверхности усечённого конуса.

Основные понятия

Усечённый конус, боковая поверхность усечённого конуса, основания усечённого конуса, образующая усечённого конуса, ось усечённого конуса, высота усечённого конуса, осевое сечение усечённого конуса, развёртка усечённого конуса, площадь боковой поверхности усечённого конуса, площадь полной поверхности усечённого конуса.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	10.1, 10.3, 10.5	10.7	10.25		10.2, 10.4, 10.6
2	10.9, 10.11, 10.13, 10.15	10.17, 10.18, 10.20, 10.22, 10.23	10.26	Самостоятельная работа № 11: № 1, 3	10.10, 10.12, 10.14, 10.16

Методические комментарии

Усечённый конус — понятие, новое для учащихся. Его можно определять двояко: как результат деления конуса на два тела плоскостью, параллельной плоскости основания, и как результат вращения прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям. В учебнике рассмотрены оба этих подхода.

Следует разъяснить учащимся, какую роль играет задача 4.25 в первом способе введения понятия усечённого конуса.

В учебнике говорится о вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей стороны. Можно повторить с учащимися, что собой представляет прямоугольная трапеция, и сделать вывод о том, что важен именно тот факт, что трапеция вращается вокруг той стороны, которая перпендикулярна основаниям. Именно поэтому при вращении оснований трапеции получаем круги, лежащие в параллельных плоскостях.

Следует обратить внимание учащихся, что если пересечь конус плоскостью, не параллельной плоскости основания, то образовавшееся тело усечённым конусом не является.

Для того чтобы правильно изобразить усечённый конус, можно использовать ту же идею, что и для изображения усечённой пирамиды.

При выводе формулы площади боковой поверхности усечённого конуса используется довольно распространённый приём преобразования пропорции, при котором можно выразить один отрезок через другой, заданный.

Сечением усечённого конуса, проходящим через две образующие, является равнобедренная трапеция. Поэтому во многих задачах на усечённый конус необходимо использовать свойства равнобедренной трапеции. Целесообразно перед изучением этой темы повторить свойства равнобедренной трапеции.

Комментарии к упражнениям

№ 10.15. Проведите через точки A и B диаметры нижнего и верхнего оснований усечённого конуса. Далее постройте осевое сечение, содержащее эти диаметры.

§ 11. Комбинации конуса и пирамиды

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями пирамиды, вписанной в конус, и пирамиды, описанной около конуса, использовать свойства взаимного расположения конуса и пирамиды. ***Личностные:*** формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью. ***Метапредметные:*** формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями пирамиды, вписанной в конус, и пирамиды, описанной около конуса, ис-

пользовать свойства взаимного расположения конуса и пирамиды.

Основные понятия Пирамида, вписанная в конус; пирамида, описанная около конуса; усечённая пирамида, вписанная в конус; усечённая пирамида, описанная около конуса.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	11.1, 11.3, 11.4, 11.6				11.2, 11.5, 11.7
2	11.8, 11.10, 11.12, 11.14		11.32		11.9, 11.11, 11.13, 11.15
3	11.16, 11.19, 11.21, 11.23	11.17	11.33		11.18, 11.20, 11.22, 11.24
4	11.25, 11.27, 11.29, 11.31			Самостоятельная работа № 12: № 1, 3	11.26, 11.28, 11.30

Методические комментарии

Учащиеся достаточно легко понимают теоретический материал этого параграфа, поскольку уже знакомы с понятиями вписанных и описанных тел на примере цилиндра и пирамиды.

Следует обратить внимание на то, что при рассмотрении комбинации конуса и пирамиды обязательным условием является совпадение вершин конуса и пирамиды. Поэтому условия того, что в пирамиду можно вписать конус (около пирамиды можно описать конус), два: кроме требования существования вписанной в основание (описанной около основания) окружности, ещё имеется требование, чтобы вершина пирамиды проектировалась в центр этой окружности.

Комбинации усечённого конуса и усечённой пирамиды достаточно сложны. Целесообразно обсудить с учащимися рисунки 11.3 и 11.4 и сделать вывод о том, что основания усечённой пирамиды являются гомотетичными многоугольниками, вписанными в гомотетичные окружности (описанными около гомотетичных окружностей).

Следует обсудить с учащимися факт, который часто применяется при решении задач: если конус вписан в пирамиду, то отрезок, соединяющий вершину пирамиды с точкой касания основания конуса и ребра пирамиды, и радиус, проведённый в точку касания, представляют собой линейный угол двугранного угла при ребре основания пирамиды.

Также желательно обсудить, каким образом необходимо переформулировать условия того, что пирамиду можно вписать в конус (описать около конуса). В формулировках, приведённых в учебнике, идёт речь о том, что вершина пирамиды проектируется в центр соответствующей окружности. Из этого можно прийти к выводу о равенстве: для вписанного конуса — линейных углов при рёбрах основания пирамиды, для описанного конуса — углов, под которыми боковые рёбра пирамиды наклонены к основанию. К этому же выводу можно прийти, рассматривая конус как тело вращения и рассматривая те положения вращаемого треугольника, в которых он касается рёбер основания либо вершин основания пирамиды.

Определение площади боковой поверхности конуса как площади развёртки его боковой поверхности является нестрогим, поскольку понятие самой развёртки дано нестрого. Поэтому в параграфе предложен ещё один путь введения этого понятия. Этот подход имеет планиметрический аналог — определение площади круга как предела последовательности площадей правильных многоугольников, вписанных в круг. Поэтому естественно определить площадь боковой поверхности конуса как предел последовательности боковых поверхностей правильных пирамид, вписанных в конус.

Комментарии к упражнениям

№ 11.12. Из условия задачи следует, что вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника.

№ 11.16. Высоты боковых граней данной пирамиды равны, поскольку каждая из этих высот равна образующей вписанного конуса. В основание данной пирамиды можно вписать окружность. Поэтому суммы противоположных сторон основания равны. Из этих двух фактов легко доказать утверждение задачи.

№ 11.24. Рассмотрите прямоугольную трапецию, основания которой — радиусы оснований усечённого конуса, боковые стороны — высота усечённого конуса и высота боковой грани усечённой пирамиды.

№ 11.25. Рассмотрите прямоугольную трапецию, основания которой — радиусы оснований усечённого конуса, боковые стороны — высота усечённого конуса и образующая усечённой пирамиды.

№ 11.25, 11.28. Здесь целесообразно напомнить учащимся решение задачи 9.36. Важно понять, что если угол при вершине осевого сечения конуса тупой, то наибольшую площадь имеет сечение, содержащее две перпендикулярные образующие, а если — острый или прямой, то наибольшую площадь имеет осевое сечение.

Контрольная работа № 2

§ 12. Сфера и шар. Уравнение сферы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятиями сферы и шара, выводить уравнение сферы, составлять уравнение сферы по заданным её элементам.

Личностные: формировать целостное мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятиями сферы и шара, выводить уравнение сферы, составлять уравнение сферы по заданным её элементам.

Основные понятия

Сфера, центр сферы, радиус сферы, диаметр сферы, шар, центр шара, радиус шара, диаметр шара, уравнение сферы, неравенство, задающее шар.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	12.1, 12.2, 12.4, 12.5, 12.6				12.3, 12.7

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	12.8, 12.10, 12.12, 12.14, 12.16		12.25		12.9, 12.11, 12.13, 12.15, 12.17
3	12.18, 12.20, 12.21, 12.22, 12.24		12.26	Самостоятельная работа № 13: № 1, 3	12.19, 12.23

Методические комментарии

Учащиеся достаточно легко воспринимают материал этого параграфа, поскольку он ассоциативно и непосредственно связан с многими понятиями, изученными в курсе планиметрии.

Целесообразно перед изучением этой темы повторить такое понятие, как ГМТ, а также напомнить учащимся определения окружности и круга.

Нередко учащиеся называют сферой ГМТ, равноудалённых от заданной точки. Однако при таком определении точка будет являться сферой, поэтому такой подход нецелесообразен. В то же время определение, данное в параграфе, исключает ситуацию, когда точка является сферой.

В определении шара расстояние от заданной точки до точки шара может быть равно нулю. Это условие позволяет центру шара принадлежать шару.

В параграфе рассматривается и другой подход к определению сферы и шара — как телам вращения, полученным в результате вращения полуокружности и полукруга.

Важно обратить внимание учащихся на то, что доказательство теоремы 12.1 состоит из доказательства двух взаимно обратных теорем: 1) если точка принадлежит сфере, то её координаты удовлетворяют данному уравнению; 2) каждое решение данного уравнения является координатами точки, принадлежащей сфере.

В задаче, разобранной в параграфе, повторяется известный из курса планиметрии метод поиска ГМТ с помощью методов аналитической геометрии, когда поиск фигуры сводится к поиску её уравнения.

Комментарии к упражнениям

№ 12.16. Координаты центра M сферы имеют вид $M\ (0;\ y;\ z)$. Следует воспользоваться тем, что $MA = MB = \sqrt{46}$.

№ 12.21, 12.23. Здесь можно воспользоваться ключевой задачей 4 параграфа 5.

№ 12.24. Геометрическим местом точек пространства X таких, что $XA : XB = k$, где $k \neq 1$, является сфера, которую называют сферой Аполлония. Целесообразно напомнить учащимся планиметрический аналог этой задачи (окружность Аполлония).

§ 13. Взаимное расположение сферы и плоскости

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение распознавать случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Личностные: развивать навыки самостоятельной работы, анализа своей работы.

Метапредметные: формировать умение соотносить свои действия с планируемыми результатами.

Планируемые результаты

Учащийся научится распознавать случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

Основные понятия

Взаимное расположение сферы и плоскости, большая окружность сферы, большой круг шара, ортогональная проекция шара (сферы) на плоскость, абрис, касательная плоскость к сфере, свойство радиуса, проведённого к сфере, внешнее касание сфер, внутреннее касание сфер.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	13.1, 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.7		13.56		13.2, 13.8

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	13.9, 13.11, 13.13, 13.14		13.57		13.10, 13.12, 13.15
3	13.17, 13.19, 13.21, 13.23, 13.26	13.16, 13.24, 13.27, 13.29			13.18, 13.20, 13.22, 13.25, 13.28
4	13.30, 13.31, 13.36, 13.41, 13.43, 13.45, 13.49	13.33, 13.38, 13.39, 13.42, 13.44, 13.46, 13.48, 13.50, 13.52, 13.53, 13.54, 13.55		Самостоятельная работа № 14: № 1—3	13.32, 13.37, 13.47, 13.51

Методические комментарии

Материал этого параграфа основан на определении сферы как ГМТ. Перед началом изучения параграфа следует повторить с учащимися это определение и актуализировать знания о том, как соотносится с радиусом сферы расстояние от центра сферы до точки, находящейся на сфере, внутри сферы и вне её.

На основании этой информации учащиеся достаточно легко воспринимают случаи, когда сфера и плоскость не имеют общих точек и когда их пересечением является окружность.

Случай, когда плоскость и сфера имеют только одну общую точку, воспринимается учащимися сложнее.

Следует обратить внимание учащихся то, что понятие фигуры, касающейся сферы, вводится только для плоских фигур. При этом для касания недостаточно, чтобы фигура принадлежала касательной плоскости: сфера и фигура должны иметь общую точку. С другой стороны, наличие только одной общей точки у фигуры и сферы тоже недостаточно для того, чтобы фигура касалась сферы.

Следует обратить внимание учащихся на то, что через данную точку сферы можно провести бесконечно много прямых, касающихся данной сферы в этой точке. Этот факт не имеет планиметрического аналога.

Свойство касательной плоскости к сфере является аналогом планиметрического свойства касательной к окружности.

Для дальнейшего изучения комбинаций сферы с многогранником важно, чтобы учащиеся усвоили материал, связанный с касанием сферы граней двугранного угла.

Ключевая задача этого параграфа основывается на наглядном представлении о взаимном расположении сферы, секущей плоскости и касательных, проведённых к сфере и принадлежащих данной плоскости. Рассматриваемое свойство имеет планиметрический аналог, поэтому легко воспринимается учащимися.

Следует сообщить учащимся о том, что в стереометрии, в отличие от планиметрии, для того чтобы прямая была касательной к окружности, недостаточно того, чтобы они имели только одну общую точку, надо, чтобы они ещё и лежали в одной плоскости. Эта информация может понадобиться для того, чтобы определять, в каком случае взаимного расположения прямой и окружности можно применять свойства касательной к окружности.

Теорема 13.2 является достаточным условием того, что данная плоскость является касательной к сфере.

В параграфе исследуются возможности взаимного расположения двух сфер. Желательно предварительно повторить с учащимися аналогичные конфигурации взаимного расположения двух окружностей на плоскости.

В задаче 2 параграфа рассматривается каркасный тетраэдр. Если учащиеся захотят узнать больше об этом многограннике, то им можно предложить принять участие в работе над соответствующим проектом.

Комментарии к упражнениям

№ 13.30. Докажите, что прямые, о которых говорится в условии, проходят через центр сферы.

№ 13.31. Искомым ГМТ является окружность.

№ 13.36. Легко найти радиусы сечений. Расстояние от центра одного сечения до хорды — это расстояние от центра шара до другого сечения.

№ 13.38. Плоскости сечений образуют четыре двугранных угла. Рассмотрите два случая: центр шара принадлежит двугранному углу, величина которого равна α или $180° - \alpha$.

№ 13.45. После решения уравнения, составленного по условию задачи, становится ясно, что эта задача имеет два решения. На этот факт следует обратить внимание учащихся как на одно из преимуществ координатного метода. Также два полученных решения надо проиллюстрировать на рисунке.

№ 13.49. Следует обратить внимание учащихся на следующий факт. Расстояние между центрами сфер условие задачи задаёт однозначно. При этом радиусы сфер неизвестны.

§ 14. Многогранники, вписанные в сферу

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием многогранника, вписанного в сферу, применять свойства призмы, вписанной в сферу, и свойства пирамиды, вписанной в сферу.

Личностные: формировать умение формулировать собственное мнение.

Метапредметные: формировать умение использовать приобретённые знания в практической деятельности.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием многогранника, вписанного в сферу, применять свойства призмы, вписанной в сферу, и свойства пирамиды, вписанной в сферу.

Основные понятия

Многогранник, вписанный в сферу, свойства призмы, вписанной в сферу, свойства пирамиды, вписанной в сферу.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	14.1, 14.3, 14.4, 14.6				14.2, 14.5, 14.7
2	14.8, 14.12, 14.14, 14.16	14.10	14.37		14.9, 14.13, 14.15
3	14.17, 14.18, 14.21, 14.23	14.19, 14.24, 14.26, 14.28	14.38		14.20, 14.22, 14.25
4	14.29, 14.31, 14.33, 14.35	14.36		Самостоятельная работа № 15: № 1, 3	14.30, 14.32, 14.34

Методические комментарии

Определение многогранника, вписанного в сферу, достаточно просто. Обращаем внимание на то, что в данном определении не требуется, чтобы многогранник был выпуклым. Действительно, существуют многогранники, не являющиеся выпуклыми, все вершины которых принадлежат сфере (например, стилизованная «голова динозавра»). Однако для учащихся этот факт неочевиден.

В параграфе рассмотрены необходимые и достаточные условия того, что данный многогранник можно вписать в сферу.

Отдельно рассмотрены пирамида и призма, вписанные в сферу. Алгоритм, рассмотренный в учебнике для доказательства того, что некоторую пирамиду (призму) можно вписать в сферу, сводится к доказательству того, что существует точка, равноудалённая от вершин пирамиды (призмы). Аналогичный алгоритм можно использовать при решении задач, в которых нужно определить либо использовать местонахождение центра описанной сферы.

Ключевые задачи параграфа являются достаточными условиями, при которых вокруг пирамиды и призмы можно описать сферу. Доказательство этих свойств основано на методе ГМТ: точка, принадлежащая пересечению двух ГМТ, обладает двумя свойствами.

Изображать многогранники, вписанные в сферу, достаточно сложно в первую очередь потому, что на изображении невозможно визуализировать точки пересечения каких-либо линий со сферой. В этих случаях может помочь проведение дополнительных окружностей на сфере, которые помогают зрительно «закрепить» нужные точки на поверхности сферы. Этот приём продемонстрирован на рисунках 14.1, 14.4.

При решении задач на многогранники, вписанные в сферу, учащиеся допускают распространённую ошибку: считают, что центр сферы принадлежит многограннику. Задача 3, разобранная в параграфе, показывает, какие случаи необходимо рассматривать. Также следует обратить внимание учащихся на второй способ решения этой задачи. Там предложен метод решения, который не зависит от положения центра описанной сферы.

Задачи 4—6, разобранные в параграфе, являются характерными для данной темы, поэтому способствуют формированию навыков решения задач на комбинации сферы и многогранника.

Комментарии к упражнениям

№ 14.1—14.12. Чтобы не рассматривать все возможные случаи расположения центра описанной сферы, следует воспользоваться приёмом, описанным во втором способе решения задачи 3 параграфа: продлить высоту пирамиды до пересечения с описанной сферой и рассмотреть образовавшийся прямоугольный треугольник.

№ 14.31, 14.32. Можно рассмотреть две возможности как с использованием метода координат, так и чисто геометрическое решение, основанное на вычислении элементов пирамиды.
№ 14.35. Целесообразно напомнить учащимся известный факт из планиметрии: касательная к описанной окружности треугольника, проведённая через вершину треугольника, параллельна прямой, проходящей через основания высот, проведённых из двух других вершин.

§ 15. Многогранники, описанные около сферы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием многогранника, описанного около сферы, применять свойства призмы описанной около сферы.

Личностные: формировать умение представлять результат своей деятельности.

Метапредметные: формировать умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием многогранника, описанного около сферы, применять свойства призмы описанной около сферы.

Основные понятия

Многогранник, описанный около сферы, свойства призмы, описанной около сферы, свойства пирамиды, описанной около сферы.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	15.1, 15.3, 15.5				15.2, 15.4, 15.6
2	15.7, 15.10, 15.14	15.9, 15.12	15.33		15.8, 15.11, 15.15

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
3	15.16, 15.20, 15.21, 15.22	15.18	15.34		15.17, 15.19, 15.23
4	15.24, 15.26, 15.28, 15.29, 15.30	15.31, 15.32		Самостоятельная работа № 16: № 1, 2	15.25, 15.27

Методические комментарии

Определение многогранника, описанного около сферы, достаточно просто. Обращаем внимание на то, что в данном определении не указано, является ли многогранник выпуклым. Однако далее при формулировке достаточных условий того, что в многогранник можно вписать сферу, формулировка «выпуклый» присутствует.

Сфера, вписанная в многогранник, касается двугранных углов многогранника при его рёбрах. Поэтому перед изучением этой темы следует повторить свойства сферы, касающейся граней двугранного угла.

В данном параграфе приведены доказательства того, что в многогранники некоторых отдельных видов (тетраэдр, правильная пирамида, правильная пирамида, высота которой равна радиусу описанной окружности её основания) можно вписать сферу, при этом приведён алгоритм нахождения центра сферы. Однако надо обратить внимание учащихся на то, что существуют и другие многогранники, кроме перечисленных, в которые можно вписать сферу. Пример такого многогранника приведён в задаче 3 параграфа. Критерием такой возможности является существование точки, равноудалённой от граней многогранника.

Следует обратить внимание на то, что, характеризуя положение центра вписанной в многогранник сферы, рассматривается расстояние от точки до плоскостей, содержащих грани, а не до самих граней. Это очень важный момент. Ведь исходя из определения расстояния от точки до фигуры, расстояние от точки до многогранника не обязательно равно расстоянию от точки до плоскости многогранника.

Разбирая задачу 3 параграфа, следует обратить внимание учащихся на то, что шар можно вписать и в наклонную призму.

Комментарии к упражнениям

№ 15.12. Воспользуйтесь тем, что вписанный шар касается боковой грани в точке, принадлежащей высоте боковой грани.
№ 15.14. Рассмотрите прямоугольный треугольник, один катет которого — это высота пирамиды, гипотенуза — высота боковой грани. В этом треугольнике биссектриса делит катет в отношении 2 : 1. Тогда, воспользовавшись свойством биссектрисы треугольника, легко найти величину двугранного угла пирамиды при ребре основания.
№ 15.26, 15.27. Для того чтобы решение было корректным, надо доказать, что центр описанного шара принадлежит пирамиде.
№ 15.31. Дополнительно можно поставить такую задачу. Найдите радиус вписанной сферы в равногранный тетраэдр, если его скрещивающиеся рёбра равны a, b и c.

§ 16. Тела вращения, вписанные в сферу

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты	***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями цилиндра, вписанного в сферу; конуса, вписанного в сферу; усечённого конуса, вписанного в сферу, использовать свойства тел вращения, вписанных в сферу. ***Личностные:*** формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью. ***Метапредметные:*** формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации.
Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями цилиндра, вписанного в сферу, конуса, вписанного в сферу, усечённого конуса, вписанного в сферу, использовать свойства тел вращения, вписанных в сферу.
Основные понятия	Цилиндр, вписанный в сферу; конус, вписанный в сферу; усечённый конус, вписанный в сферу.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	16.1, 16.3, 16.5		16.30		16.2, 16.4
2	16.6, 16.8, 16.12, 16.14, 16.16	16.10	16.31	Самостоятельная работа № 17: № 1, 2	16.7, 16.9, 16.13, 16.15, 16.17

Методические комментарии

Поскольку цилиндр, конус и сфера являются телами вращения, то представить эти тела вписанными в сферу достаточно легко. Этому помогают рисунки, на которых изображены равнобедренный треугольник, прямоугольник и равнобедренная трапеция, вписанные в окружность. Эти же рисунки помогают уяснить взаимное расположение элементов этих тел, знания о котором необходимы для решения задач.

Следует обратить внимание учащихся на то, что любой цилиндр и любой конус и любой усечённый конус можно вписать в сферу.

При решении задач на комбинацию круглых тел достаточно ограничиться рисунком осевого сечения этой комбинации.

Задача, разобранная в параграфе, помогает преодолеть стереотип, что центр сферы, описанной около тела, всегда принадлежит этому телу.

Комментарии к упражнениям

№ 16.12. Следует рассмотреть два случая: центр описанного шара принадлежит конусу и не принадлежит конусу.

§ 17. Тела вращения, описанные около сферы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты — ***Предметные:*** формировать умение оперировать понятиями цилиндра, описанного около сферы; конуса, описанного около сферы; усечённого конуса, описанного около сферы; использовать свойства тел вращения, описанных около сферы.

Личностные: формировать умение соотносить полученный результат с поставленной целью.

Метапредметные: формировать умение понимать и использовать математические средства наглядности для иллюстрации, интерпретации, аргументации.

Планируемые результаты	Учащийся научится оперировать понятиями цилиндра, описанного около сферы; конуса, описанного около сферы; усечённого конуса, описанного около сферы; использовать свойства тел вращения, описанных около сферы.
Основные понятия	Цилиндр, описанный около сферы; конус, описанный около сферы; усечённый конус, описанный около сферы.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	17.1, 17.3, 17.5				17.2, 17.4, 17.6
2	17.7, 17.9, 17.11, 17.12	17.14		Самостоятельная работа № 16: № 3, 4, 5	17.8, 17.10, 17.13
3	17.16, 17.18, 17.19, 17.20	17.21, 17.22		Самостоятельная работа № 18: № 1, 3	17.15, 17.17

Методические комментарии

Поскольку цилиндр, конус, усечённый конус и сфера являются телами вращения, то представить эти тела описанными около сферы достаточно легко. Этому помогают рисунки, на которых изображены равнобедренный треугольник, прямоугольник и равнобедренная трапеция, описанные около окружности. Эти же рисунки помогают уяснить взаимное расположение элементов этих тел, знания о котором необходимы для решения задач.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в любой конус можно вписать сферу; однако сферу можно вписать не во всякий цилиндр, а только в такой, высота которого равна диаметру его основания. Этот факт может пригодиться при решении задач: если известно, что в цилиндр вписана сфера, то сразу можно сделать вывод о соотношении высоты и радиуса основания цилиндра.

При решении задач на комбинацию круглых тел достаточно ограничиться рисунком осевого сечения этой комбинации.

Комментарии к упражнениям

№ 17.12. Рассмотрите равнобедренный треугольник, в который вписана окружность радиуса r. Угол при вершине этого треугольника равен $180° - \alpha$. Далее следует найти боковую сторону треугольника, т. е. длину образующей конуса.
№ 17.16. Рассмотрите равнобедренную трапецию, в которую вписана окружность. Поскольку центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис трапеции, то легко установить, что угол при большем основании трапеции равен $180° - \alpha$.
№ 17.22. Какое из сечений, осевое или содержащее две перпендикулярные образующие, имеет наибольшую площадь, зависит от того, является ли угол при вершине осевого сечения тупым, или острым, или прямым. Можно напомнить учащимся, что с задачами такого рода они встречались и раньше: 11.27, 11.28.

Контрольная работа № 3

Глава 3. Объёмы тел. Площадь сферы

§ 18. Объём тела. Формула для вычисления объёма призмы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение оперировать понятием объёма тела, выводить и применять формулу для нахождения объёма призмы.

Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится оперировать понятием объёма тела, выводить и применять формулу для нахождения объёма призмы.

Основные понятия

Объём тела, формула объёма призмы.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	18.1, 18.3, 18.5, 18.6				18.2, 18.4, 18.7
2	18.8, 18.10, 18.12, 18.16, 18.20	18.13, 18.15, 18.18	18.40		18.9, 18.11, 18.14, 18.17, 18.21
3	18.22, 18.24, 18.26, 18.28	18.30, 18.32	18.41		18.23, 18.25, 18.27, 18.29
4	18.34, 18.36, 18.38, 18.39			Самостоятельная работа № 19: № 1, 2	18.33, 18.35, 18.37

Методические комментарии

Учащиеся на интуитивном уровне знакомы с понятием объёма тела, знают формулы для нахождения объёма прямоугольного параллелепипеда. Определение объёма тела, данное в параграфе, формализует наглядные представления учащихся об объёме. Поскольку это определение по структуре и содержанию похоже на определение площади многоугольника, то перед изучением данной темы целесообразно повторить определение площади многоугольника.

Материал этого параграфа непосредственно связан с темой, изучаемой в курсе алгебры и начал анализа: применение определённого интеграла для вычисления объёмов тел.

В первую очередь следует разъяснить учащимся, как следует расположить тело в координатном пространстве, чтобы можно было применять формулу $V = \int_a^b S(x)dx$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что полученная формула для нахождения объёма пирамиды обобщает известную формулу для нахождения объёма прямоугольного параллелепипеда.

Ключевая задача параграфа даёт ещё одну формулу для нахождения объёма пирамиды. При доказательстве этой формулы используется метод равносоставленных фигур.

Задача 2 параграфа имеет планиметрический аналог — это поиск высоты треугольника с использованием его площади.

Комментарии к упражнениям

№ 18.25. Пусть O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Рассмотрим треугольник OCC_1. Высота этого треугольника, проведённая из вершины C, равна $2\sqrt{3}$ см. Поскольку известны углы рассматриваемого треугольника, то можно найти его катеты.

№ 18.31. Докажите, что проекция бокового ребра призмы на плоскость основания принадлежит биссектрисе угла треугольника.

№ 18.37. Найдите объёмы призм, на которые разбивает данную призму плоскость AA_1C.

§ 19. Формулы для вычисления объёмов пирамиды и усечённой пирамиды

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение выводить и применять формулы для нахождения объёма пирамиды и объёма усечённой пирамиды.

Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять формулы для нахождения объёма пирамиды и объёма усечённой пирамиды.

Основные понятия

Формула объёма пирамиды, формула объёма усечённой пирамиды.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	19.1, 19.3, 19.5, 19.7				19.2, 19.4, 19.6
2	19.8, 19.10, 19.12, 19.14, 19.17	19.16			19.9, 19.11, 19.13, 19.15, 19.18
3	19.20, 19.22, 19.23, 19.25	19.27	19.60	Самостоятельная работа № 20: № 1, 2	19.21, 19.24, 19.26
4	19.29, 19.30, 19.32, 19.35	19.33, 19.37, 19.38	19.61		19.31, 19.34, 19.36
5	19.40, 19.42, 19.44, 19.46, 19.49	19.41, 19.47			19.43, 19.45, 19.48

Окончание

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
6	19.50, 19.52, 19.55, 19.58	19.53, 19.56		Самостоятельная работа № 21: № 1, 3	19.51, 19.54, 19.57, 19.59

Методические комментарии

Доказательство теоремы 18.1 является очень характерным примером того, как надо подготовить исходные данные к использованию формулы $V = \int_a^b S(x)dx$. В первую очередь следует расположить данную пирамиду в координатном пространстве так, чтобы пределы интегрирования были равны 0 и h. Далее следует найти формулу для выражения площади сечения пирамиды через высоту пирамиды и расстояние от сечения до вершины пирамиды.

Поскольку любой многогранник можно разбить на конечное число пирамид, то полученная формула позволяет находить объём любого многогранника.

Доказательство формулы для нахождения объёма усечённой пирамиды во многом аналогично выводу формулы для нахождения объёма пирамиды. Сложность заключается лишь в технической реализации.

Формула, доказанная в ключевой задаче параграфа, часто применяется для поиска радиуса сферы, вписанной в многогранник. Эта формула удобна тем, что не требует связывать решение задачи с положением центра сферы, вписанной в многогранник.

Комментарии к упражнениям

№ 19.27. Воспользуйтесь ключевой задачей параграфа.
№ 19.32. Следует ввести сторону основания пирамиды. Далее выразить объём пирамиды двумя способами: считать основанием правильный треугольник или считать основанием боковую грань пирамиды.
№ 19.33. Через диагональ основания проведите сечение перпендикулярно боковому ребру. Сечением будет являться равнобедренный треугольник с углом α при вершине и с основанием, равным $a\sqrt{2}$.

№ 19.40. Пусть площадь грани ABC тетраэдра $DABC$ равна S_1. Выразите высоту тетраэдра, проведённую к этой грани, через a, α и S_2.
№ 19.44. Найдите отношение объёма пирамиды $CABNM$ к объёму данной призмы.
№ 19.47. Предложим план другого решения, отличного от того, который дан в указании. Пусть $DABC$ — данный равногранный тетраэдр. Рассмотрим тетраэдр $DA_1B_1C_1$, где $A_1B_1C_1$ — треугольник, для которого стороны треугольника ABC являются средними линиями. Докажите, что тетраэдр $DA_1B_1C_1$ прямоугольный. Далее воспользуйтесь тем, что объём тетраэдра $DA_1B_1C_1$ в четыре раза больше объёма тетраэдра $DABC$.

Контрольная работа № 4

§ 20. Объёмы тел вращения

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение выводить и применять формулы для нахождения объёма конуса, объёма усечённого конуса, объёма цилиндра, объёма шара.

Личностные: формировать независимость суждений.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и применять формулы для нахождения объёма пирамиды и объёма усечённой пирамиды.

Основные понятия

Формула объёма конуса, формула объёма усечённого конуса, формула объёма цилиндра, формула объёма шара, шаровой сегмент, основание сегмента, высота сегмента, шаровой слой, шаровой сектор.

Номер урока	**Задания для формирования предметных результатов**	**Дополнительные задания**	**Задания для повторения**	**Задания для контроля и коррекции предметных результатов**	**Задания для домашней работы**
1	20.1, 20.3, 20.4, 20.6				20.2, 20.5, 20.7

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
2	20.8, 20.10, 20.12, 20.14, 20.16	20.18	20.56		20.9, 20.11, 20.13, 20.15, 20.17
3	20.20, 20.22, 20.25, 20.29, 20.31	20.24, 20.27, 20.33			20.21, 20.23, 20.26, 20.30, 20.32
4	20.34, 20.36, 20.38, 20.42	20.40	20.57		20.35, 20.37, 20.39
5	20.43, 20.45, 20.49, 20.51, 20.53	20.44, 20.47, 20.54		Самостоятельная работа № 22: № 1, 2	20.46, 20.48, 20.50, 20.52

Методические комментарии

Вывод формулы для нахождения объёма конуса во многом аналогичен выводу формулы для объёма пирамиды. Поэтому соответствующее доказательство воспринимается учащимися достаточно легко.

В зависимости от уровня подготовки учащихся класса можно предложить им самостоятельно вывести формулы для нахождения объёмов усечённого конуса и цилиндра.

В параграфе выводится только формула для вычисления объёма шарового сегмента. Аналогично можно вывести формулы для вычисления объёма шарового слоя. Однако в этом нет необходимости, поскольку объём шарового слоя можно вычислить как разность объёмов шаровых сегментов.

Формулы для вычисления объёма шарового сектора учащиеся могут вывести самостоятельно.

Комментарии к упражнениям

№ 20.45. Пусть высота призмы равна h, а сторона основания — a. Следует выразить величину a^2h через заданную величину V.

№ 20.51. Воспользуйтесь тем, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота трапеции равна полусумме оснований.

§ 21. Площадь сферы

Технологическая карта уроков

Формируемые результаты

Предметные: формировать умение выводить и использовать формулу для нахождения площади сферы.

Личностные: формировать ответственное отношение к обучению, готовности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию.

Метапредметные: формировать умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Планируемые результаты

Учащийся научится выводить и использовать формулу для нахождения площади сферы.

Основные понятия

Площадь поверхности шара.

Номер урока	Задания для формирования предметных результатов	Дополнительные задания	Задания для повторения	Задания для контроля и коррекции предметных результатов	Задания для домашней работы
1	21.1, 21.3, 21.5		21.22		21.2, 21.4, 21.6
2	21.7, 21.10, 21.12, 21.14, 21.18, 21.20	21.8, 21.16	21.23	Самостоятельная работа № 23: № 1, 3	21.9, 21.11, 21.13, 21.15, 21.19, 21.21

Методические комментарии

Учащиеся должны понять, почему для определения площади сферы необходим другой метод, отличный от того, который использовался при нахождении боковой поверхности цилиндра и конуса. Другими словами, идея развёртки для нахождения площади поверхности тела в общем случае неприменима.

Определение, которое предложено в учебнике, называют определением площади поверхности по Минковскому. Это определение воспринимается учащимися легко, поскольку имеет доступную и наглядную практическую интерпретацию в виде слоя краски, покрывающего площадь поверхности тела.

Для тех, кто хочет знать больше о площади поверхности тела, можно порекомендовать прочитать дополнительный рассказ после параграфа 20.

Комментарии к упражнениям

№ 20.14. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.
№ 20.16. Центр описанного шара принадлежит прямой, соединяющей вершину пирамиды с центром гипотенузы прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды.

Контрольная работа № 5

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Тема. Координаты и векторы в пространстве

Вариант 1

1. Точки A и B симметричны относительно точки C. Найдите координаты точки B, если $A\ (-3; 5; -7)$, $C\ (6; 2; -1)$.
2. Найдите координаты центроида тетраэдра $DABC$, если $A\ (5; 3; 2)$, $B\ (2; 4; 2)$, $C\ (1; 2; 3)$, $D\ (2; 2; -2)$.
3. Даны векторы $\vec{a}\,(3; -2; -1)$ и $\vec{b}\,(1; 2; 4)$. Найдите:
   1) координаты вектора $\vec{m} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$;
   2) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4. Даны векторы $\vec{a}\,(2; -6; 8)$ и $\vec{b}\,(-1; k; -4)$. При каком значении k векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
5. Основанием пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Ребро MD перпендикулярно плоскости основания. Перпендикулярно ребру MB через его середину проведена плоскость, пересекающая прямую AD в точке K. Найдите отрезок DK, если $AB = 1$ см, $BC = 6$ см, $MD = 4$ см.
6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали C_1D его грани отметили точку M так, что $DM : MC_1 = 5 : 3$.
   1) Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.
   2) Найдите модуль вектора $\overrightarrow{AM}$.

Вариант 2

1. Точки M и K симметричны относительно точки D. Найдите координаты точки K, если $M\ (4; -6; 3)$, $D\ (-2; 1; 5)$.
2. Найдите координаты центроида тетраэдра $DABC$, если $A\ (-1; -1; -5)$, $B\ (2; 0; -1)$, $C\ (-1; 1; -1)$, $D\ (-2; -1; 0)$.
3. Даны векторы $\vec{m}\,(2; -1; 3)$ и $\vec{n}\,(-1; 2; 5)$. Найдите:
   1) координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$;
   2) косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
4. Даны векторы $\vec{m}\,(5; -4; 6)$ и $\vec{n}\,(15; -12; p)$. При каком значении p векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

5. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Ребро SB перпендикулярно плоскости основания. Перпендикулярно ребру SD через его середину проведена плоскость, пересекающая прямую BC в точке K. Найдите отрезок BK, если $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $SB = 6$ см.
6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали AD_1 его грани отметили точку E так, что $AE : ED_1 = 2 : 7$.
   1) Выразите вектор $\overrightarrow{BE}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.
   2) Найдите модуль вектора $\overrightarrow{BE}$.

Вариант 3

1. Точки E и F симметричны относительно точки P. Найдите координаты точки F, если E (0; –8; 4), P (–4; 2; 2).
2. Найдите координаты центроида тетраэдра $DABC$, если A (2; 0; 3), B (0; 1; 5), C (3; 2; 0), D (–1; –2; 4).
3. Даны векторы $\vec{a}$ (2; 0; –3) и $\vec{b}$ (1; –2; –1). Найдите:
   1) координаты вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$;
   2) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4. Даны векторы $\vec{b}$ (–20; 10; –15) и $\vec{c}$ (a; –2; 3). При каком значении a векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
5. Основанием пирамиды $KABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Ребро KC перпендикулярно плоскости основания. Перпендикулярно ребру KA через его середину проведена плоскость, пересекающая прямую CD в точке M. Найдите отрезок MC, если $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $KC = 5$ см.
6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали A_1B его грани отметили точку K так, что $A_1K : KB = 4 : 3$.
   1) Выразите вектор $\overrightarrow{C_1K}$ через векторы $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.
   2) Найдите модуль вектора $\overrightarrow{C_1K}$.

Вариант 4

1. Точки B и C симметричны относительно точки M. Найдите координаты точки B, если C (9; –5; 6), M (3; 0; –2).
2. Найдите координаты центроида тетраэдра $DABC$, если A (4; 3; 1), B (0; –1; 5), C (1; 2; 6), D (3; 1; 4).

3. Даны векторы $\vec{m}(4; -1; 2)$ и $\vec{n}(-2; 1; 0)$. Найдите:

1) координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$;

2) косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

4. Даны векторы $\vec{a}(1; -2; 3)$ и $\vec{c}(7; m; 21)$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?

5. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Перпендикулярно ребру SB через его середину проведена плоскость, пересекающая прямую CD в точке N. Найдите отрезок NC, если $AB = 2$ см, $BC = 1$ см, $SD = 4$ см.

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1 см. На диагонали AC его грани отметили точку F так, что $AF : FC = 3 : 7$.

1) Выразите вектор $\overrightarrow{B_1F}$ через векторы $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$.

2) Найдите модуль вектора $\overrightarrow{B_1F}$.

Контрольная работа № 2

Тема. Цилиндр. Конус. Усечённый конус. Комбинации цилиндра, конуса и усечённого конуса с многогранниками

Вариант 1

1. Радиусы оснований усечённого конуса равны 9 см и 17 см, а высота — 15 см. Найдите образующую усечённого конуса.
2. Образующая и радиус основания цилиндра соответственно равны 12 см и 10 см. Точки A и B принадлежат окружностям разных оснований цилиндра. Найдите расстояние между прямой AB и осью цилиндра, если $AB = 20$ см.
3. Образующая конуса равна 36 см. Диаметр AB и хорда AC основания соответственно равны 30 см и 18 см. Найдите косинус угла между прямой BC и прямой, проходящей через вершину конуса и точку A.
4. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 8 см, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

5. Основание пирамиды — треугольник, одна из сторон которого равна c, а противолежащий ей угол равен γ. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

Вариант 2

1. Радиусы оснований усечённого конуса равны 14 см и 10 см, а образующая — 5 см. Найдите высоту усечённого конуса.
2. Образующая и радиус основания цилиндра соответственно равны 16 см и 25 см. Точки M и N принадлежат окружностям разных оснований цилиндра. Найдите расстояние между прямой MN и осью цилиндра, если $MN = 34$ см.
3. Образующая конуса равна 20 см. Диаметр AB и хорда BC основания соответственно равны 26 см и 24 см. Найдите косинус угла между прямой AC и прямой, проходящей через вершину конуса и точку B.
4. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 18 см, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.
5. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, катет которого равен b, а противолежащий острый угол равен β. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

Вариант 3

1. Радиус меньшего основания усечённого конуса равен 8 см, образующая — 15 см, а высота — 9 см. Найдите радиус большего основания усечённого конуса.
2. Образующая и радиус основания цилиндра соответственно равны 15 см и 26 см. Точки K и P принадлежат окружностям разных оснований цилиндра. Найдите расстояние между прямой KP и осью цилиндра, если $KP = 25$ см.
3. Образующая и радиус основания конуса соответственно равны 45 см и 20 см. Угол между диаметром AB основания и хордой AC равен $30°$. Найдите косинус угла между прямой BC и прямой, проходящей через вершину конуса и точку A.
4. Высота правильной четырёхугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол $60°$. Най-

дите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

5. Основание пирамиды — прямоугольник, одна из сторон которого равна a и образует с диагональю прямоугольника угол α. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

Вариант 4

1. Радиус большего основания усечённого конуса равен 11 см, образующая — 13 см, а высота — 12 см. Найдите радиус меньшего основания усечённого конуса.
2. Образующая и радиус основания цилиндра соответственно равны 10 см и 15 см. Точки F и E принадлежат окружностям разных оснований цилиндра. Найдите расстояние между прямой FE и осью цилиндра, если $FE = 26$ см.
3. Образующая и радиус основания конуса соответственно равны 30 см и $8\sqrt{3}$ см. Угол между диаметром AB основания и хордой BC равен $60°$. Найдите косинус угла между прямой AC и прямой, проходящей через вершину конуса и точку B.
4. Высота правильной треугольной призмы равна 12 см, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.
5. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом β при вершине. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса, описанного около данной пирамиды.

Контрольная работа № 3

Тема. Сфера и шар. Уравнение сферы. Комбинации шара с многогранниками, цилиндром и конусом

Вариант 1

1. Диаметр шара равен 26 см. Найдите площадь сечения шара плоскостью, удалённой от его центра на 12 см.
2. Составьте уравнение сферы с центром в точке A (6; –2; 7), проходящей через точку B (8; –1; 5).

3. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $120°$. Вокруг конуса описан шар, радиус которого равен 8 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
4. Определите, является ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 2z + 31 = 0$ уравнением сферы. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра сферы и её радиус.
5. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.
6. Ребро DC тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус сферы, описанной около данного тетраэдра, если $DC = 16$ см, $AB = 6$ см и угол ACB равен $30°$.

Вариант 2

1. Диаметр шара равен 10 см. Найдите расстояние от центра шара до его сечения, площадь которого равна 9π см^2.
2. Составьте уравнение сферы с центром в точке C (–3; 1; 9), проходящей через точку D (1; 5; 8).
3. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник. Вокруг конуса описан шар, радиус которого равен 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
4. Определите, является ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 4y - 18z + 112 = 0$ уравнением сферы. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра сферы и её радиус.
5. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.
6. Ребро DA тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус сферы, описанной около данного тетраэдра, если $DA = 14$ см, $BC = 12$ см и угол BAC равен $45°$.

Вариант 3

1. Площадь сечения шара равна 64π см^2. Это сечение удалено от центра шара на 6 см. Найдите радиус шара.
2. Составьте уравнение сферы с центром в точке M (2; 4; –10), проходящей через точку K (3; –2; –13).
3. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник. Вокруг конуса описан шар, радиус которого равен 4 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

4. Определите, является ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y - 16z + 120 = 0$ уравнением сферы. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра сферы и её радиус.
5. Апофема правильной треугольной пирамиды равна b, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен α. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.
6. Ребро DB тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус сферы, описанной около данного тетраэдра, если $DB = 10$ см, $AC = 15$ см и угол ABC равен $60°$.

Вариант 4

1. Диаметр шара равен 34 см. Найдите площадь сечения шара плоскостью, удалённой от его центра на 15 см.
2. Составьте уравнение сферы с центром в точке E (–1; –5; 6), проходящей через точку F (2; –7; 4).
3. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Вокруг конуса описан шар, радиус которого равен 2 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
4. Определите, является ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 20z + 94 = 0$ уравнением сферы. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра сферы и её радиус.
5. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна b, а двугранный угол пирамиды при ребре основания равен β. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.
6. Ребро DC тетраэдра $DABC$ перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус сферы, описанной около данного тетраэдра, если $DC = 24$ см, $AB = 5$ см и угол ACB равен $150°$.

Контрольная работа № 4

Тема. Объёмы многогранников

Вариант 1

1. Основание прямой треугольной призмы — прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 10 см. Высота призмы равна 8 см. Найдите объём призмы.
2. Найдите объём правильной усечённой треугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 6 см и 8 см, а высота — 9 см.

3. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с углом α при основании и радиусом вписанной окружности r. Две боковые грани пирамиды, содержащие боковые стороны основания, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.
4. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.
5. Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 72 см^3. На рёбрах AB, AC и AA_1 соответственно отметили точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 1$, $AN : NC = 1 : 3$ и $AK : KA_1 = 3 : 1$. Найдите объём тетраэдра $AMNK$.

Вариант 2

1. Основание прямой четырёхугольной призмы — параллелограмм со сторонами 4 см и $5\sqrt{2}$ см и углом 45° между ними. Высота призмы равна 6 см. Найдите объём призмы.
2. Найдите объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 4 см и 7 см, а высота — 12 см.
3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим острым углом α. Две боковые грани пирамиды, содержащие катеты этого треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.
4. В правильной четырёхугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.
5. Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 60 см^3. На рёбрах CA, CB и CC_1 соответственно отметили точки F, E и N так, что $CF : FA = 2 : 3$, $CE : EB = 1 : 1$ и $CN : NC_1 = 1 : 3$. Найдите объём тетраэдра $CFEN$.

Вариант 3

1. Основание прямой треугольной призмы — треугольник со сторонами $4\sqrt{3}$ см и 6 см и углом 60° между ними. Высота призмы равна 2 см. Найдите объём призмы.
2. Найдите объём правильной усечённой треугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 2 см и 10 см, а высота — 6 см.
3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетом b и противолежащим острым углом β. Две боковые грани пирамиды, содержащие катеты этого треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом α. Найдите объём пирамиды.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде угол между боковым ребром и стороной основания равен α. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.
5. Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 120 см^3. На рёбрах BA, BC и BB_1 соответственно отметили точки M, K и F так, что $BM : MA = 1 : 3$, $BK : KC = 2 : 1$ и $BF : FB_1 = 1 : 4$. Найдите объём тетраэдра $BMKN$.

Вариант 4

1. Основание прямой четырёхугольной призмы — прямоугольник со сторонами 4 см и 7 см. Высота призмы равна 3 см. Найдите объём призмы.
2. Найдите объём правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, стороны оснований которой равны 3 см и 9 см, а высота — 5 см.
3. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с радиусом описанной окружности R и углом α при вершине. Две боковые грани пирамиды, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья — наклонена к ней под углом β. Найдите объём пирамиды.
4. В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и стороной основания, имеющей с ним общую вершину, равен α. Найдите объём пирамиды, если её высота равна h.
5. Объём призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 90 см^3. На рёбрах AB, AC и AA_1 соответственно отметили точки D, M и P так, что $AD : DB = 1 : 1$, $AM : MC = 3 : 2$ и $AP : PA_1 = 1 : 2$. Найдите объём тетраэдра $ADMP$.

Контрольная работа № 5

Тема. Объёмы тел вращения. Площадь сферы

Вариант 1

1. Высота цилиндра равна $5\sqrt{3}$ см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол $30°$. Найдите объём цилиндра.
2. Образующая конуса равна 26 см, а его высота — 24 см. Найдите объём конуса.
3. Объёмы двух шаров относятся как 8 : 125. Найдите отношение площадей их поверхностей.
4. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая находится на расстоянии d от центра верхнего основания и которая видна из

этого центра под углом φ. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём цилиндра.

5. Основанием пирамиды является ромб со стороной 16 см и углом 60°. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 30°. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.
6. Две параллельные плоскости пересекают шар радиуса 10 см. Радиусы кругов, образовавшихся в сечении, равны 6 см и 8 см. Найдите объём шарового слоя, ограниченного этими кругами.

Вариант 2

1. Радиус основания цилиндра равен $2\sqrt{2}$ см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём цилиндра.
2. Образующая конуса равна 17 см, а диаметр его основания — 16 см. Найдите объём конуса.
3. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их объёмов.
4. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, длина которой равна b. Эта хорда видна из центра нижнего основания под углом β, а отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой проведённой хорды, образует с плоскостью основания угол α. Найдите объём цилиндра.
5. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной 20 см и основанием 24 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны 45°. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.
6. Две параллельные плоскости пересекают шар радиуса 17 см. Радиусы кругов, образовавшихся в сечении, равны 15 см и 8 см. Найдите объём шарового слоя, ограниченного этими кругами.

Вариант 3

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объём цилиндра.
2. Образующая конуса равна 25 см, а диаметр его основания — 30 см. Найдите объём конуса.
3. Объёмы двух шаров относятся как 27 : 64. Найдите отношение площадей их поверхностей.
4. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая видна из центра этого основания под углом α. Отрезок, соединяющий центр

верхнего основания с серединой этой хорды, равен b и образует с плоскостью основания угол β. Найдите объём цилиндра.

5. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны $60°$. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.
6. Две параллельные плоскости пересекают шар радиуса 29 см. Радиусы кругов, образовавшихся в сечении, равны 21 см и 20 см. Найдите объём шарового слоя, ограниченного этими кругами.

Вариант 4

1. Высота цилиндра равна $12\sqrt{3}$ см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объём цилиндра.
2. Образующая конуса равна 15 см, а его высота — 9 см. Найдите объём конуса.
3. Площади поверхностей двух шаров относятся как 9 : 25. Найдите отношение их объёмов.
4. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которая находится на расстоянии d от центра верхнего основания и стягивает дугу, градусная мера которой равна α, $0° < \alpha < 180°$. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол φ. Найдите объём цилиндра.
5. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой 30 см и катетом 18 см. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны $30°$. Найдите объём конуса, вписанного в данную пирамиду.
6. Две параллельные плоскости пересекают шар радиуса 37 см. Радиусы кругов, образовавшихся в сечении, равны 35 см и 12 см. Найдите объём шарового слоя, ограниченного этими кругами.

Контрольная работа № 6

Тема. Обобщение и систематизация знаний учащихся

Вариант 1

1. Даны точки A (1; 5; 8), B (5; 2; 9), C (7; 4; 7), D (8; 3; 0). Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости BCD.
2. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Эта плоскость пересекает основание конуса по хор-

де, которая видна из центра основания под углом β. Радиус основания конуса равен R. Найдите площадь сечения конуса данной плоскостью.

3. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Диагональ боковой грани призмы, содержащей основание равнобедренного треугольника, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите:

1) объём призмы;

2) площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

4. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с острым углом α. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объём пирамиды, если радиус сферы, описанной около неё, равен R.

5. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ равны по $90°$. Известно, что рёбра DA, DB и DC соответственно равны 2 см, 6 см и 4 см. Найдите: 1) объём тетраэдра; 2) радиус сферы, вписанной в тетраэдр; 3) радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Вариант 2

1. Даны точки A (2; 2; 1), B (3; 5; 4), C (–1; –10; –14), D (–4; 6; –1). Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости ABC.

2. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Эта плоскость пересекает основание конуса по хорде длиной a, которая видна из центра основания под углом α. Найдите площадь сечения конуса данной плоскостью.

3. Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ боковой грани призмы, содержащей боковую сторону основания, равна d и наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите:

1) объём призмы;

2) площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

4. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объём пирамиды, если радиус сферы, описанной около неё, равен R.

5. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ равны по $90°$. Известно, что рёбра DA, DB и DC соответственно равны 2 см, 6 см и

8 см. Найдите: 1) объём тетраэдра; 2) радиус сферы, вписанной в тетраэдр; 3) радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Вариант 3

1. Даны точки A (12; –9; –4), B (4; –5; 8), C (2; –3; 6), D (–1; –13; 5). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости ABD.
2. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Эта плоскость пересекает основание конуса по хорде, которая видна из центра основания под углом β. Высота конуса равна h. Найдите площадь сечения конуса данной плоскостью.
3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Диагональ боковой грани призмы, содержащей гипотенузу основания, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите:
   1) объём призмы;
   2) площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.
4. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при основании. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите объём пирамиды, если радиус вписанной в неё сферы равен r.
5. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ равны по 90°. Известно, что рёбра DA, DB и DC соответственно равны 2 см, 8 см и 10 см. Найдите: 1) объём тетраэдра; 2) радиус сферы, вписанной в тетраэдр; 3) радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Вариант 4

1. Даны точки A (0; –1; 2), B (1; –2; 3), C (3; 2; –2), D (1; 6; 8). Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости ABC.
2. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость, пересекающая основание конуса по хорде, которая видна из центра основания под углом β. Радиус основания конуса равен R. Найдите площадь сечения конуса данной плоскостью.
3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Диагональ боковой грани призмы, содержащей катет, противолежащий углу α, наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите:

1) объём призмы;

2) площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около призмы.

4. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Двугранные углы пирамиды при рёбрах основания равны β. Найдите объём пирамиды, если радиус вписанной в неё сферы равен r.

5. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $DABC$ равны по $90°$. Известно, что рёбра DA, DB и DC соответственно равны 16 см, 4 см и 2 см. Найдите: 1) объём тетраэдра; 2) радиус сферы, вписанной в тетраэдр; 3) радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся

Одним из направлений оценочной деятельности в соответствии с требованиями Стандарта является оценка образовательных достижений обучающихся.

Система оценки достижения планируемых результатов по математике направлена на обеспечение качества математического образования. Она должна позволять отслеживать индивидуальную динамику развития учащихся, обеспечивать обратную связь для учителей, учащихся и родителей.

Формирование **личностных результатов** обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой.

Основным **объектом** оценки личностных результатов служит сформированность универсальных учебных действий, включаемых в следующие три основных блока:

1) сформированность *основ гражданской идентичности* личности;

2) готовность к переходу к *самообразованию на основе учебно-познавательной мотивации,* в том числе готовность к *выбору направления профильного образования*;

3) сформированность социальных компетенций, включая ценностно-смысловые установки и моральные нормы, опыт социальных и межличностных отношений, правосознание.

Основным **объектом** оценки **метапредметных результатов** является:

- способность и готовность к освоению систематических знаний по математике, их самостоятельному пополнению, переносу и интеграции;
- способность к сотрудничеству и коммуникации в ходе учебной и вне учебной деятельности;
- способность и готовность к использованию ИКТ в целях обучения и развития;
- способность к самоорганизации, саморегуляции и рефлексии.

Основным **объектом** оценки **предметных результатов** по математике в соответствии с требованиями Стандарта является способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, релевантных содержанию учебных предметов, в том числе метапредметных (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Основными видами оценивания образовательных достижений по математике являются: *стартовое, текущее* и *итоговое*.

Стартовое оценивание позволяет учителю спланировать личностно-ориентированное обучение, индивидуализировать образовательный процесс.

Текущее оценивание позволяет определить: уровень усвоения нового материала, степень самостоятельности обучающихся при решении задач, характер применения рациональных способов решения задач и др. Для текущего оценивания можно использовать следующие методы контроля:

Методы контроля в учебном процессе по математике

Устный контроль	**Письменный контроль**	**Практический контроль**
• Фронтальный опрос • Индивидуальный опрос	• Математический диктант • Самостоятельная работа • Контрольная работа • Реферат • Тест	• Фронтальная или индивидуальная практическая работа • Домашняя контрольная работа • Исследовательская работа • Проектная работа

Итоговое оценивание может проводиться после завершения темы, раздела, учебного курса основной или старшей школы (в частности, в виде итоговой аттестации). Итоговая оценка результатов освоения обучающимися основной образовательной программы выставляется по результатам промежуточной и итоговой аттестации и формируется на основе:

• результатов внутришкольного мониторинга образовательных достижений по математике, зафиксированных в оценочных листах, в том числе за промежуточные и итоговые работы на межпредметной основе;

• оценок за выполнение итоговых работ по математике;

• оценки за выполнение и защиту индивидуального проекта;

• оценок за работы, выносимые на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся

ИКТ-компетентность обучающихся — умение самостоятельно работать с информацией, способность решать учебно-познавательные задачи, используя средства ИКТ.

ИКТ-компетентность учителя — умение, способность и готовность решать профессиональные задачи, используя распространённые в данной профессиональной области средства ИКТ.

С целью формирования ИКТ-компетентности обучающихся при изучении математики использовать средства ИКТ можно:

- на уроках математики;
- во внеурочной деятельности;
- в учебно-исследовательской и проектной деятельности;
- при измерении, контроле и оценке планируемых результатов.

Для того чтобы значительно расширить дидактические возможности урока математики, учитель может *использовать следующие* средства ИКТ: *мультимедийные фрагменты теоретических материалов, электронные дидактические материалы, моделирование геометрических фигур*, *готовые программные продукты* (*компьютерные тренажёры, интерактивные курсы, коллекции ЭОР и др.*). В помощь учителю предлагаем технологическую карту урока (приложение 1), на котором используются ИКТ.

Для успешного осуществления внеурочной, учебно-исследовательской и проектной деятельности учащиеся осуществляют поиск необходимой информации в сети Интернет, работу с электронными учебниками и приложениями к ним, создают и редактируют компьютерные презентации, веб-страницы.

Использование средств ИКТ при обучении математики способствует:

- *повышению интереса к предмету, мотивации обучения, познавательного интереса*;
- *расширению возможностей использования источников информации;*
- *созданию возможностей для дифференцированного, индивидуального и личностно-ориентированного обучения*;
- *повышению эффективности анализов результатов обучения.*

Применение средств ИКТ в обучении математике формирует ИКТ-компетентность учащихся, в результате чего учащийся научится:

• использовать калькулятор для вычислений;

• осуществлять редактирование и структурирование текста, используя средства текстового редактора;

• создавать и редактировать таблицы, используя средства текстового редактора и редактора таблиц;

• создавать различные геометрические объекты с использованием возможностей специальных инструментов компьютерных программ;

• создавать графические объекты;

• осуществлять поиск информации в Интернете;

• соблюдать требования техники безопасности при работе с устройствами ИКТ.

Приложение 1

Технологическая карта урока № ___

Тема урока	______________________________
Тип урока	______________________________
Формируемые результаты	Предметные: ______________________ Личностные: ______________________ Метапредметные: ___________________
Планируемые результаты	______________________________ ______________________________
Основные понятия	______________________________ ______________________________
Средства ИКТ, используемые на уроке	______________________________ ______________________________ ______________________________
Программное обеспечение	______________________________ ______________________________
Образовательные интернет-ресурсы	______________________________ ______________________________ ______________________________

Организационная структура урока

<table>
<tr><th rowspan="2">Этапы проведения урока</th><th rowspan="2">Форма организации УД</th><th colspan="3">Задания, выполнение которых приведёт к достижению планируемых результатов</th><th rowspan="2">Средства ИКТ</th></tr>
<tr><th>Учебник</th><th>Рабочая тетрадь</th><th>Дидактические материалы</th></tr>
<tr><td colspan="6">1. Организационный этап</td></tr>
<tr><td colspan="6">2. Постановка формируемых результатов и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся</td></tr>
<tr><td>3. Актуализация знаний</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4. Изучение нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5. Первичное закрепление нового материала</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Итоги урока</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7. Информация о домашнем задании</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся

Проект — это вид учебной деятельности, направленный на решение конкретной учебно-познавательной проблемы с заранее запланированным результатом.

Учебно-исследовательская работа — это решение исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом, представляющее собой самостоятельную, творческую работу, имитирующую настоящее научное исследование (в частности, обучающиеся учатся выдвигать гипотезы и предлагать способы их проверки, планировать и работать по плану, искать оптимальные и нестандартные решения поставленной задачи и др.).

Учебно-исследовательская и проектная деятельность на уроках математики направлены на:

- повышение интереса учащихся к предмету, мотивации учебной деятельности, развитие познавательной деятельности;
- развитие коммуникативных умений;
- формирование исследовательских умений: выявлять проблему, ставить цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы;
- формирование умений осуществлять планирование, самоконтроль, рефлексию и самоанализ своей деятельности.

При выполнении учебных проектов по математике обучающийся научится:

- анализировать фрагменты работ учёных-математиков;
- описывать историю математических открытий;
- оценивать вклад выдающихся учёных-математиков в развитие науки;
- представлять результаты измерений с помощью таблиц, графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости;
- рассматривать практические приложения математических знаний;
- применять математические знания в быту и в технике;
- анализировать связь математики с другими естественными науками.

Критерии оценки проектной и учебно-исследовательской деятельности учащихся

1. Обоснование проблемы проекта (исследования) и планирование способов её решения.

2. Постановка целей и задач исследования, глубина раскрытия темы проекта (исследования).

3. Вариативность представленных источников информации, методов исследования, целесообразность их использования.

4. Анализ хода работы, формулировка выводов и оценок, выявление перспектив дальнейшего исследования.

5. Оригинальность высказанных идей, реализация рациональных и нестандартных решений.

6. Оформление проектного продукта (результатов исследования), качество проведения презентации.

7. Практическая направленность полученных результатов.

При оценке проекта (исследования) следует оценивать прежде всего качество работы в целом, а также проявленные при этом умения проектирования учебной деятельности. Отметим, что учитель может устанавливать и другие критерии на основе своего опыта и математической подготовки учащихся.

Технология организации проведения учебно-исследовательской и проектной деятельности

План организации проектной деятельности на уроках геометрии

(Рекомендации для учителя)

Название проекта ______________________

Цели проекта ______________________

Планируемые результаты
Предметные: ______________________
Личностные: ______________________
Метапредметные: ______________________

Общая характеристика проекта

Тип проекта ______________________

Виды деятельности учащихся ______________________
____

Форма организации ______________________

Продолжительность выполнения ______________________
____

Результат (продукт) деятельности ______________________
____

План реализации проекта

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
1. Организация деятельности			
Погружение в проект	Определение темы и целей проекта. Формирование групп (группы)	Обсуждают темы проекта в группе (группах) и с учителем	Мотивирует учащихся на проектную деятельность. Рассказывает, что такое проект и метод проектов. Помогает в постановке проблемы. Помогает формировать группу (группы)
Планирование	Определение объёма работ для каждой группы (членов группы). Составление плана работы: определение источников информации; определение способов сбора данных; определение способа представления результата; определение критериев и регламента оценки работы	Распределяют обязанности внутри группы. Каждая группа выбирает тему работы и источники информации. Составляют план работы над проектом. Вырабатывают критерии регламента и оценки работы	Оказывает необходимую организационную и консультационную помощь
2. Осуществление деятельности			
Сбор информации	Сбор информации различными методами: метод опроса, наблюдение, изучение документации и т. д.	Выполняют работу над проектом	Помогает в изучении информации. Наблюдает, советует. Анализирует групповые взаимоотношения
Обобщение результатов,	Анализ полученной информации,	Анализируют полученную инфор-	Контролирует, наблюдает, советует

Окончание

Этапы	Содержание этапа	Деятельность учащихся	Деятельность учителя
выводы	подготовка к её представлению	мацию, выполняют оформление проектной работы	
3. Представление результатов и их оценка			
Презентация	Отчёт участников проекта о проделанной работе	Представляют проект	Слушает, при необходимости задаёт вопросы, обобщает, комментирует выступления
Оценка процесса и результатов работы	Оценка конечного результата коллективной деятельности. Анализ достижения поставленной цели. Рефлексия	Оценивают работу каждого члена группы (каждой группы). Анализируют, была ли достигнута поставленная цель. Проводят рефлексию своей деятельности (см. бланк рефлексии)	Участвует в коллективном анализе и оценке результатов проекта. Проводит рефлексию. Оценивает свою деятельность по педагогическому руководству деятельностью детей

Карта оценки проектной деятельности

Название проекта ______________________________

Группа ______________________________

Параметры	Самооценка[1]	Взаимооценка[1]	Оценка учителя[1]	Средний балл
Выполнение работы по проекту				
Математическая точность				
Оформление результатов проекта				
Качество представления результатов (анализ выступления)				
Итоговый балл				

[1] Оценивается по пятибалльной системе.

Бланк рефлексии

Вопрос	Ответ
1. Понравилось ли вам участвовать в проектной деятельности?	
2. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым интересным?	
3. Какой этап работы над проектом оказался для вас самым сложным? Почему?	
4. Какие знания вы получили в ходе работы над проектом?	
5. Довольны ли вы своим участием в работе группы (если нет, то почему)?	
6. Как вы оцените взаимоотношения в вашей группе во время работы над проектом?	

Содержание

От авторов 3

Поурочное планирование учебного материала 4

Методические рекомендации по организации учебной деятельности 7

Глава 1. Координаты и векторы в пространстве 7

Глава 2. Тела вращения 25

Глава 3. Объёмы тел. Площадь сферы 49

Контрольные работы 57

Методические рекомендации по оценке образовательных достижений учащихся 71

Методические рекомендации по формированию ИКТ-компетентности учащихся 73

Методические рекомендации по организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся 76