Т. Г. Ходот
А. Ю. Ходот
О. А. Дмитриева

МАТЕМАТИКА

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5—6

классы

Методические рекомендации к предметной линии учебников Т. Г. Ходот и др.

Т. Г. Ходот
А. Ю. Ходот
О. А. Дмитриева

МАТЕМАТИКА

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5—6

классы

Методические рекомендации
к предметной линии учебников
Т. Г. Ходот и др.

3-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2023

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Х69

16+

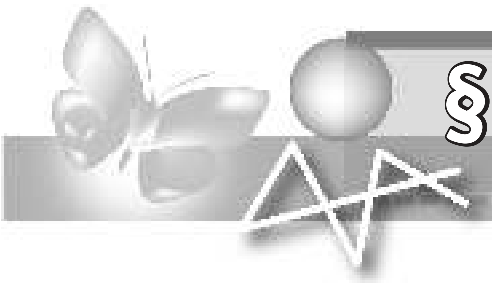
Ходот Т. Г.

Х69 Математика. Наглядная геометрия. Методические рекомендации. 5—6 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот, О. А. Дмитриева. — 3-е изд., стер. — Москва: Просвещение, 2023. — 125 с. : ил. — ISBN 978-5-09-108890-8.

Методическое пособие предназначено для оказания помощи учителю, работающему в 5—6 классах общеобразовательной школы по учебникам «Математика. Наглядная геометрия» (авторы Т. Г. Ходот и др.). В предлагаемой книге изложены авторская концепция непрерывного геометрического образования, практические советы по изучению различных тем курса, представлены календарное планирование, примерные варианты самостоятельных и контрольных работ, описание геометрического конструктора, приведены примеры геометрических экскурсий.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-108890-8



§ 1 Некоторые вопросы методики

1.1. О структуре курса геометрии средней школы

Геометрия предоставляет педагогу уникальную возможность развивать ребенка практически на любой стадии формирования его интеллекта. Три ее основные составляющие (фигуры, логика и практическая применимость) позволяют гармонично развивать образное и логическое мышление ребенка любого возраста, прививать ему навыки практической деятельности.

С одной стороны, это удачное сочетание составляющих становится для многих детей непреодолимым препятствием. Ведь они должны (по существующей традиции) одновременно знакомиться с новыми для них фигурами, создавая себе достаточно полный их образ, усваивать основные свойства этих фигур, овладевать терминологией и не только говорить, но и думать на новом, геометрическом языке. Но с другой стороны, расчленение этих составляющих разумным образом может способствовать (а опыт подсказывает, что именно так и происходит) успешному усвоению школьниками одной из самых замечательных наук — геометрии.

Одним из способов указанного расчленения является двукратное изучение курса геометрии: один раз на интуитивном уровне и второй раз на строгом логическом.

Изучение курса геометрии на интуитивном уровне может стать хорошей подготовкой к изучению геометрии на логическом уровне за счет создания образов геометрических фигур и «открытия» некоторых их свойств путем конструирования и рисования, а также овладения терминологией и основами геометрического языка. Опыт показывает, что овладение геометрией на таком уровне вполне доступно для всех детей. Для большинства же учащихся освоение геометрии на интуитивном уровне становится фундаментом, на котором дедуктивным способом строится здание ГЕОМЕТРИИ.

Изучение геометрии на наглядном, интуитивном уровне естественно начинать с первых лет обучения в школе.

В начальной школе представляется целесообразным осуществлять знакомство детей с различными геометрическими формами (как плоскими, так и пространственными), причем, на наш взгляд, знакомство должно быть подчинено внутренней логике: переход от трехмерных объектов (как наиболее привычных и знакомых детям) к двумерным, а затем одномерным и точке. Внутренняя геометрическая логика, сопровождающая курс геометрии начальной школы, естественным образом проявляется в процессе игры. В частности, это может быть игра в археологов и реставраторов, восстанавливающих какой-нибудь город (крепость и др.). Один из вариантов такой игры придуман, разработан и подкреплен экспериментом на кафедре геометрии РГПУ им. А. И. Герцена.

В 5—6 классах следует, на наш взгляд, предоставить детям возможность познакомиться с тем, как «устроены» знакомые уже геометрические фигуры, вовлечь их в конструирование и рисование этих фигур, включая тем самым детей в процесс эмпирического познания различных свойств рассматриваемых фигур. Особое внимание при этом нужно уделить развитию грамотной математической речи учащихся: научить их определять рассмотренные фигуры, а также формулировать простейшие их свойства. Особенно важной (с точки зрения развития личности и подготовки к дальнейшему изучению геометрии) мы считаем логическую выстроенность материала, которая должна соответствовать логике систематического курса.

В 7—9 классах, как теперь уже стало очевидным для многих педагогов и методистов, следует пополнить курс геометрии элементами стереометрии, излагаемыми на интуитивном, наглядном уровне параллельно аналогичному планиметрическому материалу. Трудность в изучении стереометрии, возникающая у учащихся 10 классов, в значительной степени объясняется низким уровнем развития их пространственных представлений. Ученики теряют эти представления, изучая три года одну лишь планиметрию.

И наконец, в 10—11 классах на заключительном этапе обучения изучается стереометрия, изложенная аксиоматическим методом и дополненная разнообразными задачами, как планиметрическими, так и стереометрическими.

Таким образом, школьный курс геометрии должен, на наш взгляд:

во-первых, быть непрерывным (с 1 по 11 класс);

во-вторых, содержать в себе две одинаковые по значению части: интуитивную и дедуктивную, по-разному соотнесенные одна с другой в зависимости от возраста и уровня подготовки детей.

Схематично структуру школьного курса можно представить следующим образом:

1—4 классы — сюжетная дидактическая игра, подчиненная внутренней геометрической логике, в процессе которой учащиеся знакомятся *с готовыми геометрическими формами*, плоскими и пространственными;

5—6 классы — наглядный курс геометрии, построенный в логике дедуктивного курса, основанный на *конструировании различных фигур* и получении их свойств эмпирическим путем;

7—9 классы — дедуктивный курс планиметрии с элементами наглядной стереометрии, органично и систематически подкрепляющими и развивающими этот курс планиметрии;

10—11 классы — дедуктивный курс стереометрии, сочетающийся с углублением знаний планиметрии на базе решения соответствующих задач.

Предложенная схема построения непрерывного геометрического образования в средней школе позволит за счет систематически проводимой пропедевтики, не увеличивая количества часов, отведенных на изучение геометрического материала, добиться более высокого уровня геометрического развития учащихся.

1.2. Курс геометрии 5—6 классов в структуре непрерывного геометрического образования

В последнее время появилось большое количество разнообразной (по концепции, способу изложения, подбору материала) литературы для учащихся 5—6 классов, содержащей геометрический материал. При анализе этой литературы легко заметить два основных направления, которых придерживаются авторы разных пособий.

1) В наглядной (часто игровой) форме знакомство детей с разнообразными геометрическими фигурами через серию интересных сюжетов, подкрепленных большим или меньшим количеством упражнений. При этом основной целью, которую ставят перед собой авторы, является развитие пространственных представлений учащихся и привитие им интереса к предмету.

2) Раннее включение учащихся в систематическое изучение геометрии: на доступном для них уровне и с учетом их опыта изложение систематического курса, содержащего доказательства многих теорем.

Мы считаем, что «правда, как обычно, в середине». На наш взгляд, геометрический материал, предназначенный для изучения в 5—6 классах, должен представлять собой курс, органично включенный в структуру непрерывного геометрического образования. Он может, с одной стороны, углублять и расширять представления детей об известных им геометрических фигурах, а с другой — готовить учащихся к систематическому изучению геометрии в 7—9 классах, что и является основной целью.

В 7 классе школьники сталкиваются с целым рядом трудностей, которые для определенной части учащихся являются непреодолимыми:

— им приходится работать с совершенно новыми объектами (геометрическими фигурами), восприятие которых требует умения проводить некоторые *абстракции*;

— происходит знакомство учащихся с новой *терминологией*, которую нужно усвоить в очень короткий срок;

— от учащихся требуется не только свободное *владение* новым для них *языком*, но и умение думать на этом языке, чтобы активно воспринимать материал и иметь возможность самостоятельно доказывать какие-то утверждения;

— нужно иметь некоторые навыки владения *визуальным языком*: уметь получать информацию по рисунку, чертежу, схеме и наоборот, передать информацию на соответствующем рисунке, чертеже, а потому иметь достаточно развитые *графические навыки*;

— и, наконец, требуется проведение *логических операций* и определенный уровень *пространственного мышления*.

В наших учебниках наглядной геометрии сделана попытка организации систематической подготовки учащихся к усвоению курса геометрии в 7—9 классах, которая проводится по следующим направлениям:

1. Осуществляется *психологическая подготовка*. Само построение курса и его содержание иллюстрируют главную идею геометрии: с помощью геометрических фигур мы описываем некоторые свойства реальных предметов, которые (свойства) и изучаем, с тем чтобы применить эти знания, в частности, для конструирования новых реальных объектов. Таким образом, проводится работа по формированию *положительного настроя* (мотивации) учащихся к изучению предмета.
2. В пропедевтическом курсе последовательно и целенаправленно (в основном на уровне конструирования) происходит знакомство учащихся со всеми геометрическими фигурами и многими понятиями, изучаемыми в систематическом курсе, — создается *общее пред-*

ставление о будущем систематическом *курсе*. При этом *логика* пропедевтического курса соответствует логике систематического.

3. Происходит формирование первичных представлений об *абстракциях* на примере объектов и понятий путем перехода от конкретных предметов к их абстрактным образам. На рисунке 1 показано, как формируется представление о геометрической фигуре, на рисунках 2, 3 — о подобии фигур.
4. Закладываются основы формирования правильной *геометрической речи*: учащиеся знакомятся с основными терминами и некоторыми определениями курса геометрии. При введении каждого нового термина дается соответствующее объяснение его этимологии и приводятся примеры известных детям слов, имеющих с рассматриваемым термином какую-нибудь общую часть (корень, приставку). Например, при введении термина *диаметр окружности (круга)* обсуждается смысл

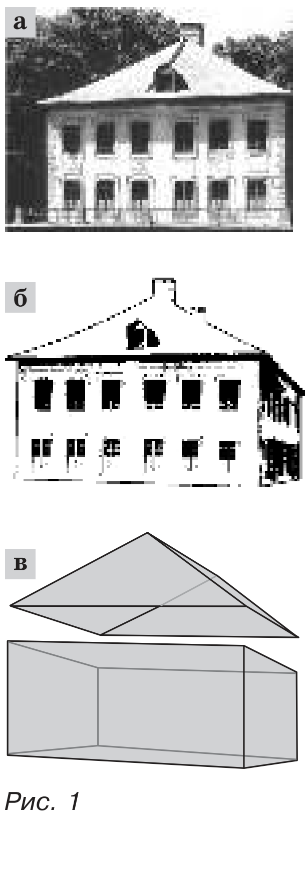


Рис. 1

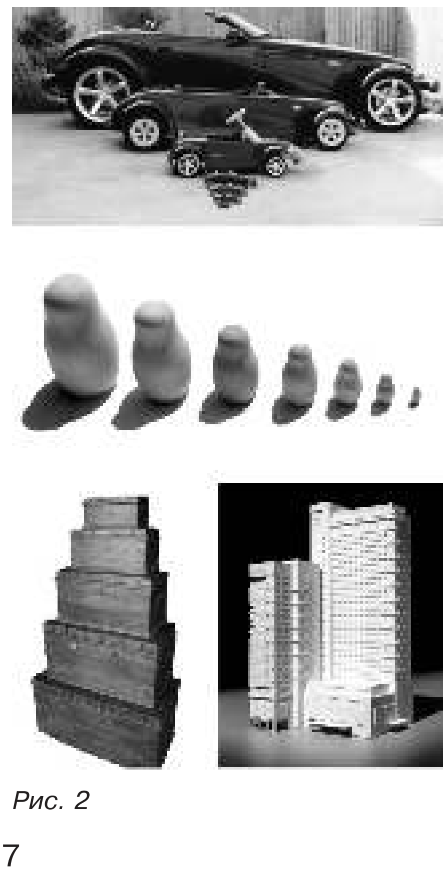


Рис. 2

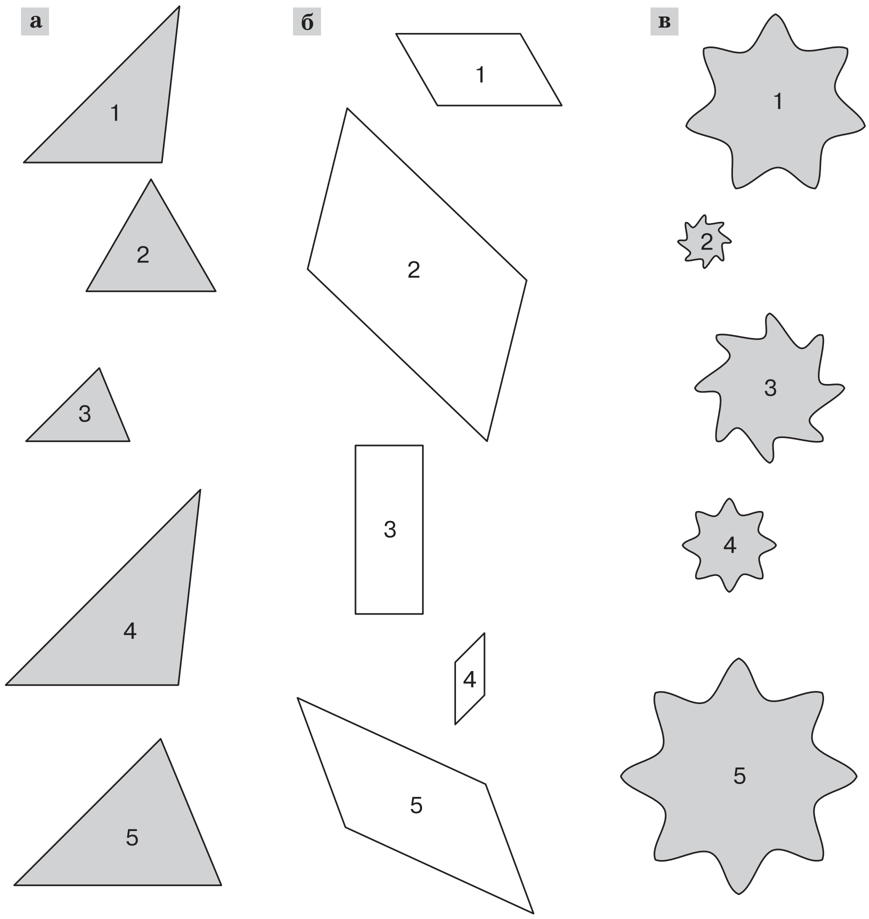


Рис. 3

приставки *диа-* и напоминаются слова: диалог, диафрагма, диафильм. Соответствующие упражнения по развитию речи подчеркивают *гуманитарную составляющую* геометрии.

5. Специально разработанная система упражнений направлена на обучение детей *приемам изображения* геометрических фигур. В частности, в учебниках имеются специальные пункты «Как мы видим и рисуем...», в которых показывается, как сделать шаблоны для изображения некоторых фигур (эллипса, куба, призмы и др.) и как с ними работать.
6. Большое внимание уделяется навыкам работы учащихся с визуальной информацией. Например, в учеб-

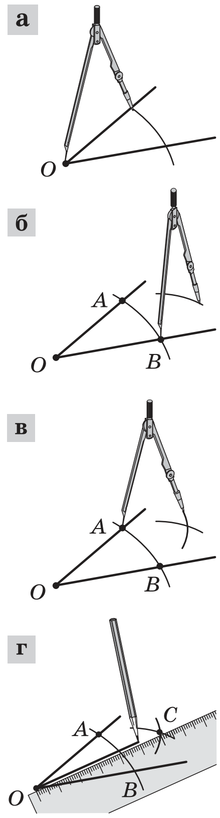


Рис. 4

Рис. 5

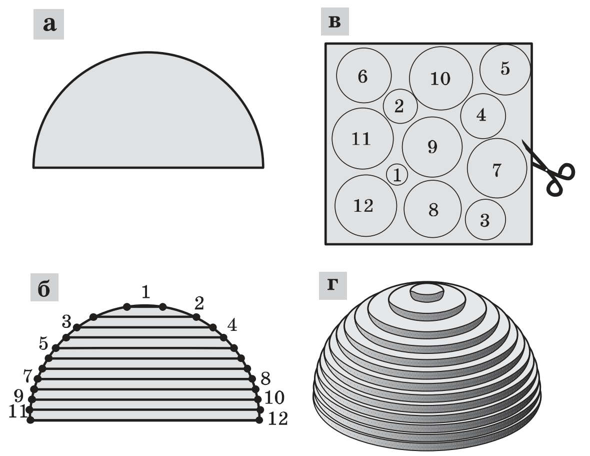


Рис. 6

никах имеются иллюстрации-«инструкторы» (рис. 4), схемы (рис. 5) и содержательные иллюстрации (рис. 6).

7. Система иллюстративного материала направлена на создание правильных *представлений* учащихся (в первую очередь пространственных), развитие *образного мышления* учащихся (рис. 7, 8).
8. Для развития пространственных представлений предлагаются, кроме обычной работы с пространственными образами, упражнения на изготовление моделей из пластилина (дети руками «чувствуют» многие свойства фигур, в первую очередь кривизну поверхности), а также на рассматривание фигур с различных сторон и изображение увиденного. Видение круга (и других плоских фигур) отрезком, отрезка — точкой и т. д. представляется авторам учебника чрезвычайно полез-

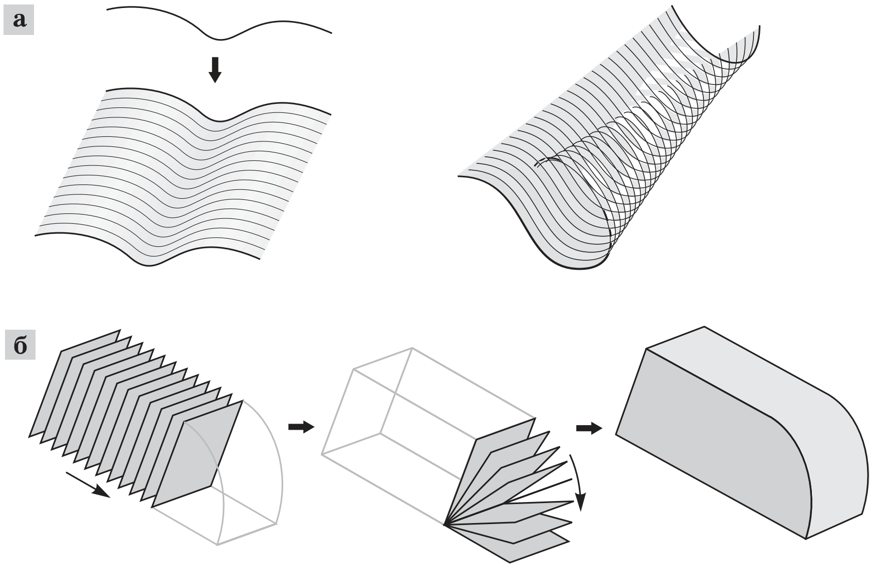


Рис. 7

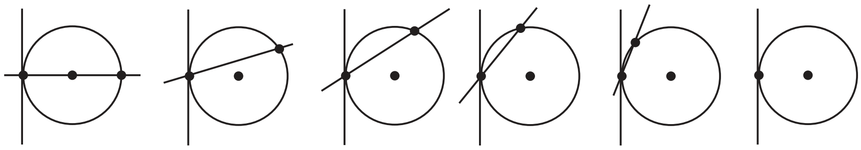


Рис. 8

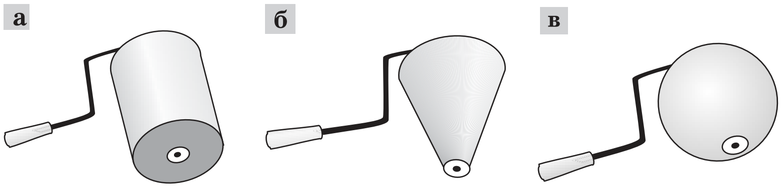


Рис. 9

ным. Предлагаются задачи, для решения которых требуется проведение мысленных пространственных операций. Например: «Какой след на стене мог бы оставить валик, изображенный на рисунке 9?».

9. Развитие логического мышления происходит путем проведения простейших логических операций: сравнения (рис. 10), аналогии (рис. 11), обобщения и ограничения понятий. Например, сначала дети знакомятся

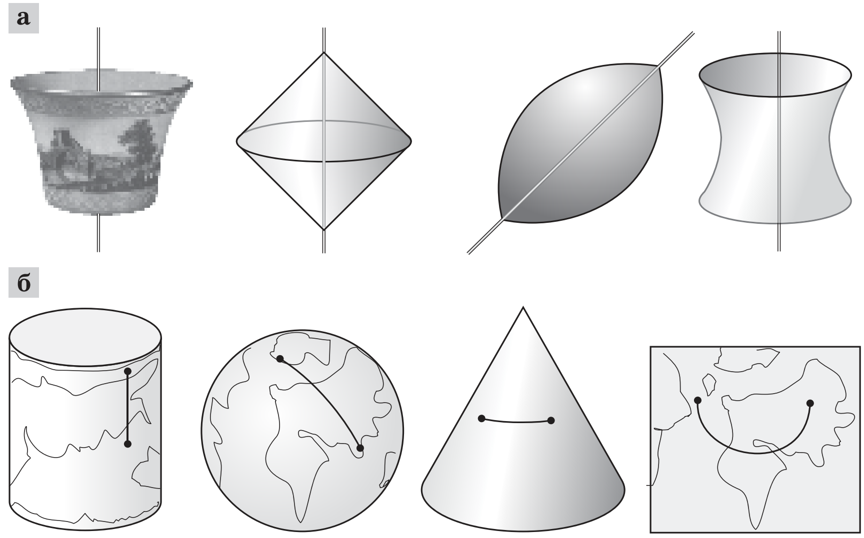


Рис. 10

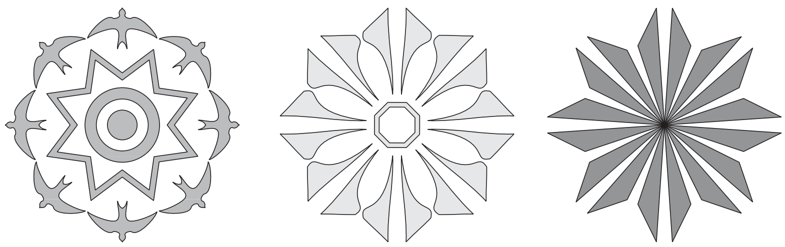


Рис. 11

с подобными прямоугольниками и треугольниками, затем определяется подобие двух произвольных фигур. Призма, например, рассматривается как частный случай цилиндра.

1.3. Некоторые методические соображения общего характера

В начальной школе дети знакомятся с целым рядом геометрических фигур, работая при этом с готовыми геометрическими формами: различают их на картинке, измеряют длины отрезков, вычисляют периметр или площадь фигуры и т. д. В 5—6 классах появляется возможность развить геометрические представления детей на новом для них уровне. Углубление и расширение геометрических знаний целесообразно проводить через конструирование моделей и изображение (уже знакомых или неизвестных) фигур.

Структурное же отличие занятий геометрией в 5—6 классах от таковых в начальной школе (в частности, в связи с подготовкой к систематическому курсу) должно, на наш взгляд, состоять в объединении геометрического материала в отдельный учебный предмет (хотя бы в рамках часов, отводимых на изучение в этих классах геометрического материала). При этом важно так мотивировать изучение геометрии, чтобы оно не превращалось в игру, а вызывало интерес учащихся главным образом за счет тщательного подбора доступных для детей форм деятельности: рисования, конструирования, решения разнообразных задач.

Выделяя геометрический материал в отдельный предмет, мы предполагаем, не проводя никаких доказательств, показать учащимся в определенной логической последовательности взаимосвязь известных понятий (и возникновение на их базе новых) и тем самым включить учащихся в процесс организованного познания нового.

Основная идея состоит в том, чтобы, сохраняя логику построения школьного курса геометрии, изложить материал на наглядном, конструктивном уровне и тем самым предоставить детям возможность в значительной степени овладеть первой — интуитивной — ступенью в усвоении геометрии. При этом в 5 классе применяется в основном дискретное конструирование (изготовление моделей из палочек, спичек, веревок и т. п.), а в 6 классе при рассмотрении разнообразных моделей дети знакомятся с понятием непрерывности. Авторы не имеют в виду, что каждый ребенок обязательно должен сделать все модели. Давая детям на дом индивидуальные задания по конструированию моделей, учитель, кроме того, что развивает навыки учащихся в конструировании, способствует созданию в классе целой коллекции наглядных пособий, которые могут быть использованы как при изучении наглядной геометрии, так и в 7—11 классах. Создание такой коллекции, кроме всего прочего, улучшает отношение ребенка к своему труду и к труду товарищей.

Для удобства хранения модели многогранников лучше не склеивать, а собирать из развертки.

В логически выстроенном интуитивном, пропедевтическом курсе геометрии особую роль играет наглядность. В систематическом курсе наглядность носит, как правило, иллюстративный характер, но в пропедевтическом курсе она должна стать основным источником геометрической информации, что диктует особый подход к подбору и производству средств наглядности и методике их использования. Все элементы системы визуальной поддержки курса (оформление учебника, наглядные пособия, конструктор, разные виды динамической наглядности и т. д.) должны быть органично взаимосвязаны. Развитие иллюстративного материала должно проходить по линии от фотографий к перспективным изображениям, а затем к рисункам и чертежам.

Придерживаясь концепции единой визуальной поддержки курса, учителю полезно разработать содержание и методику внедрения элементов динамической наглядности (компьютерной анимации и видеофильмов), придавая при этом большое значение графическому соподчинению элементов визуальной поддержки.

1.4. Наглядность — необходимое сопровождение пропедевтического курса

В возрасте 10—11 лет аппарат восприятия у ребенка развит больше, чем аппарат мышления. Значительную долю в процессе познания играют органы восприятия (ощущения, чувств), что и обусловливает особую роль наглядности в пропедевтическом курсе. Традиционное назначение средств наглядности в учебном процессе состоит в иллюстрации понятий, изучаемых объектов, решаемых задач. Однако специально разработанная система наглядных пособий может не только служить учителю инструментом для иллюстрации словесной информации, но и стать источником этой информации, не менее важным, чем речь или текст.

Мы начинаем изучать геометрию на основе перцептивного опыта ребенка, с тем чтобы, с одной стороны, облегчить восприятие нового материала, а с другой — мотивировать учебный процесс. Сначала мы показываем ученику, что многие окружающие предметы, уже знакомые ему, могут быть изучены с новой — геометрической — точки зрения. Предъявлять эти предметы можно непосредственно, можно через изображения.

Не каждый ребенок этого возраста умеет правильно воспринимать и анализировать изображения, особенно рисованные, а тем более чертежи. А ведь иллюстрация — это прежде всего материал для создания соответствующего представления об изучаемом объекте. Поэтому одна из главных задач всей системы визуальной поддержки курса геометрии — научить ребенка правильно воспринимать изображение, замечать в нем именно то, что требуется для усвоения материала или решения задачи.

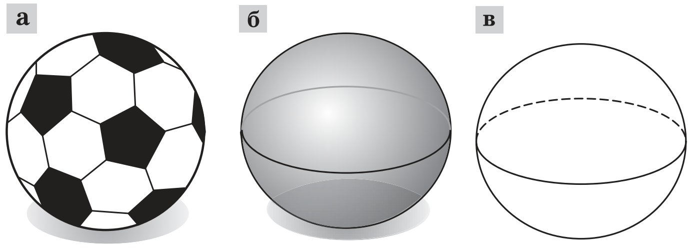


Рис. 12

Отправной точкой визуального ряда служат фотографии, вызывающие наиболее правильное, приближенное к непосредственному, восприятие объекта. Они не требуют адаптации для представления изображенного объекта, а также не содержат дополнительной информации, внесенной иллюстратором. Здесь есть только объект. Фотографиями целесообразно пользоваться на этапе определения геометрических фигур (рис. 12, *а*) для естественного введения ученика в предмет. Дальнейшее развитие иллюстративного материала в рамках одной темы должно происходить от реального к абстрактному: появляются рисованные изображения (рис. 12, *б*), с тенями, небольшой перспективой, после которых следуют чертежи и схемы (рис. 12, *в*).

Мы считаем, что процесс представления — действие, которому можно научить. Поэтому мы выделяем рисованные иллюстрации — средний уровень визуального ряда — в качестве выражающих и формирующих предметные представления и образы. В таких иллюстрациях, кроме информации, передаваемой фотографией (тени, перспектива, свет, фактура и т. д.), можно дать информацию дидактического характера. Таким образом, в пропедевтическом курсе рисованные иллюстрации мы наделяем главным развивающим значением.

Одним из наиболее эффективных способов развития правильного восприятия изображений и формирования представлений являются задания с использованием иллюстративного материала, которые опираются на визуальный и, возможно, моторный опыт ребенка. Такой, например, является задача из темы «Как мы видим и изображаем круг».

Задача 1. Рисунок 13, *а* изображает след от велосипеда, который разделен на участки, отмеченные цифрами. Какое из изображений велосипеда (рис. 13, *б*) соответствует каждому участку?

Приведем примеры упражнений, направленных на развитие представлений.

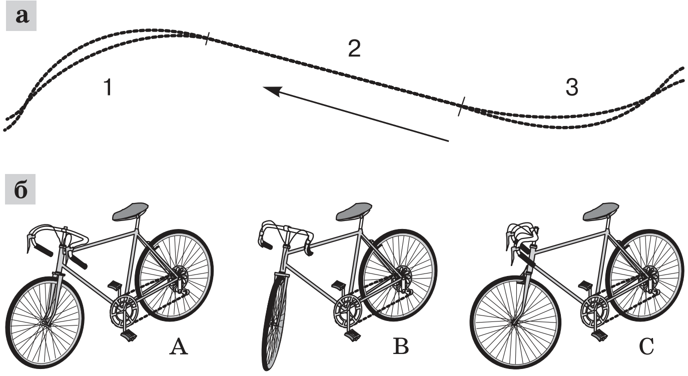


Рис. 13

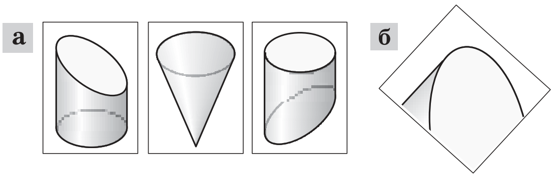


Рис. 14

Рис. 15

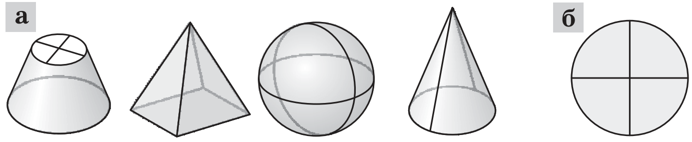


Рис. 16

Задача 2. Из какой картинки (рис. 14, *а*) вырезан фрагмент, который увеличен на рисунке 14, *б*?

Задача 3. Можно ли прокатиться на этих роликовых коньках (рис. 15)?

Задача 4. Какую из фигур рисунка 16, *а* можно увидеть так, как показано на рисунке 16, *б*?

Задача 5. Какая из картинок (рис. 17, *а*) разорвана (рис. 17, *б*)?

Здесь предложены упражнения, которые можно постоянно использовать, меняя визуальную компоненту задачи в соответствии с темой. Эти задачи, помимо развития представления, могут оказать большое влияние на усвоение геометрического материала. Для этого необходимо в иллюстрации закладывать геометрическую информацию

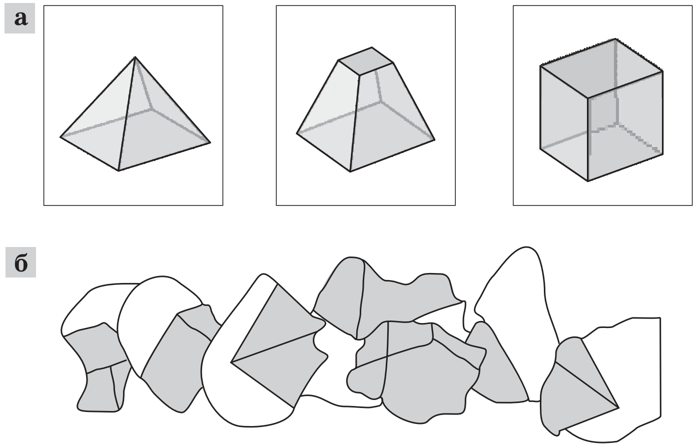


Рис. 17

именно в те места, которые могут быть использованы для решения задачи. Регулярное решение таких типовых задач формирует у ребенка понятие о методе их решения, способствует развитию навыка сознательного использования этого метода и тем самым влияет на умственное развитие ребенка.

Кроме подобных типовых задач, не исключается возможность использования единичных упражнений, развивающих представление. Например,

Задача 6. Какой оттиск (рис. 18, *а*) сделан печатью (рис. 18, *б*)?

Развитию процесса представления также служит графическое единообразие иллюстраций, содержащихся в используемых дидактических материалах и учебных пособиях, облегчая восприятие и понимание содержащейся в них геометрической информации.

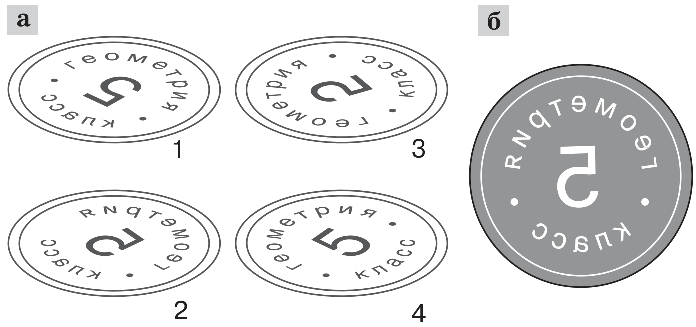


Рис. 18

Неотъемлемой частью продуктивных образовательных действий с визуальными компонентами является работа по координации формирующегося у ученика вербального пространства (как базы для создания геометрических представлений) и предлагаемой учителем системы визуальной поддержки.

Эта работа прежде всего заключается в постоянном контроле правильного восприятия ребенком иллюстрации, который можно проводить в устном или письменном виде. На ранней стадии обучения не обязательно требовать четко построенных фраз, верных с точки зрения языка и геометрии, а достаточно научить детей правильно связывать усвоенные в вербальной форме понятия и соответствующую им информацию, заложенную в иллюстрации. Для такой вербально-визуальной координации хорошо подходят следующие упражнения:

Задача 7. Установи, какое слово соответствует каждому рисунку (рис. 19).

Задача 8. Опиши, чем различаются две фигуры, изображенные на рисунке 20.

Задача 9. Выбери правильную фразу, описывающую отличие одного рисунка от другого (рис. 21).

1) части 2) кольцо 3) не многоугольник 4) крест

Рис. 19

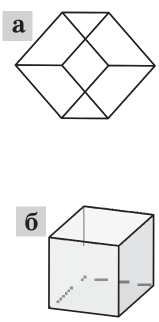
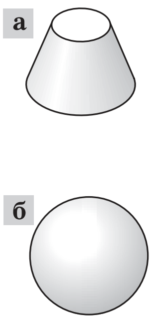


Рис. 20



больше весит
не имеет ребер
может кататься
тень — многоугольник
сделан из другого материала
чаще встречается в жизни
больше нравится
имеет основания

Рис. 21

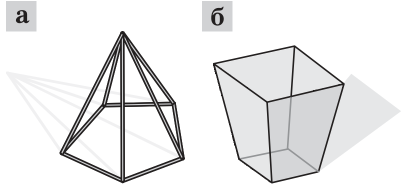


Рис. 22

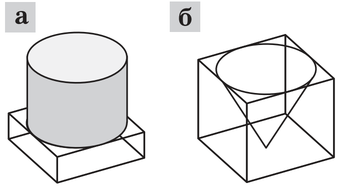


Рис. 23

незамкнутая линия
основание цилиндра
развернутый угол
железная дорога
касание
очки

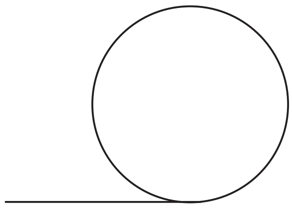


Рис. 24

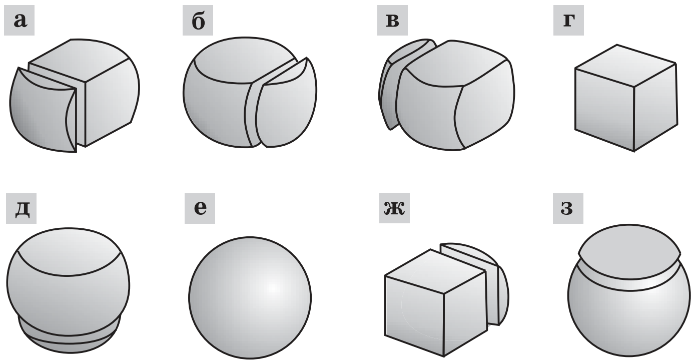


Рис. 25

<u>Задача 10.</u> Найди пять отличий одного рисунка от другого (рис. 22).

<u>Задача 11.</u> Найди общие свойства двух конструкций (рис. 23).

<u>Задача 12.</u> Какое из словосочетаний или слов не подходит к рисунку 24?

<u>Задача 13.</u> Найди закономерность, связывающую рисунки 25, *а—з*, и расставь их по порядку, соответствующему этой закономерности.

<u>Задача 14.</u> Восстанови фрагмент книги, от которого осталась лишь последовательность иллюстраций (рис. 26).

<u>Задача 15.</u> Каким фрагментом (рис. 27, *а*) можно заменить выделенный фрагмент иллюстрации (рис. 27, *б*), чтобы у нее появился другой геометрической смысл?

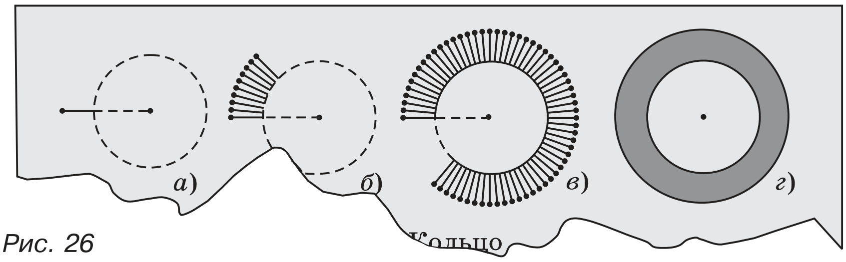


Рис. 26

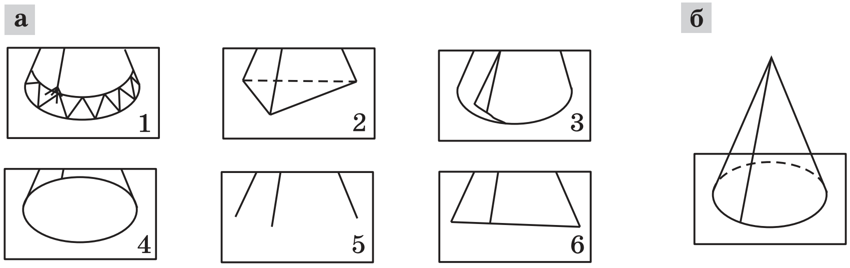


Рис. 27

Стоит заметить еще раз, что все эти упражнения определяют целые типы заданий, и, для того чтобы обеспечить дидактическую и педагогическую действенность подобных упражнений, необходимо их регулярное использование.

В наших силах через печатную или динамическую (анимационные фильмы) иллюстрации показывать способ рассуждения, последовательность представлений.

Примером последовательности иллюстраций, подчиненной идеям визуализации процесса конструирования и развития представления об объекте, может служить рисунок 28.

Совокупность этих рисунков передает определенную схему проектирования стола на уровне представления. Рисунок 28, *а* является воплощением общего представления стола как конечного результата. На рисунке 28, *б* графически показано то, что форма крышки стола на этом этапе размышления и представления будущего изделия нас не интересует. Рисунок 28, *в* фиксирует определенный уровень абстракции и выражает представление только количества и расположения ножек стола. Это уже чистая схема, отвлеченная от излишней здесь информации о материале, форме, свете, тени.

Мы утверждаем, что определенным набором предметов, иллюстраций, сюжетами видео- и анимационных фильмов можно создать у ребенка представление об абстракции,

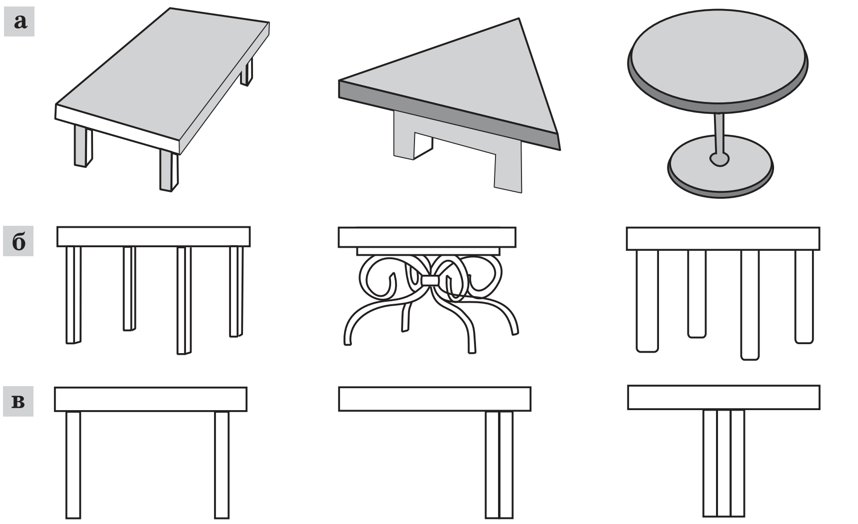


Рис. 28

научить совершать эту операцию. Например, можно использовать набор моделей шара, сделанных из разных материалов и имеющих разные цвета. Последовательное восприятие их от мягкого, фактурного и окрашенного к гладкому, возможно сделанному из гипса или другого плотного белого материала, при соответствующем методическом оформлении будет способствовать формированию представления об абстракции.

Очень важно научить ребенка графическому языку выражения представлений, т. е. технике исполнения изображений, приемам, которые вызывают ощущения объема, перспективы, параллельности и пересечения плоскостей (прямой и плоскости), принадлежности одних объектов другим, вертикальности и горизонтальности на изображении, научить проектировать объекты на различные плоскости, изображать разные ракурсы объектов, планы и расположение один за другим, видимые и невидимые элементы объектов, показать, как расставлять акценты на изображении, как передавать динамику с помощью последовательности изображений.

Нет никакой необходимости проводить специальные уроки по изобразительной технике. Достаточно обращать внимание на простые приемы, которыми пользовались иллюстраторы печатных изданий, показать их на доске, чтобы дети видели, как появляется изображение, такое, как в книге. Постепенно ученик сможет представлять технически, как производятся эти иллюстрации. Однако еще

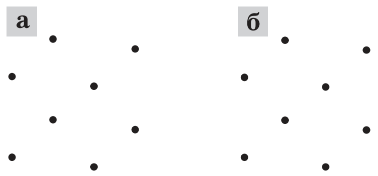


Рис. 29

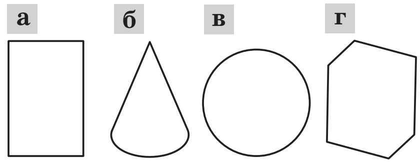


Рис. 30

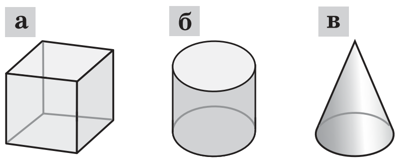


Рис. 31

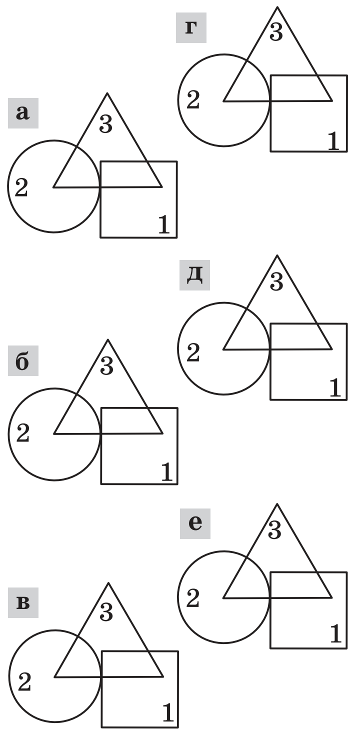


Рис. 32

раз напомним, что эффективность подобного обучения технике изображения зависит от строгого графического единообразия всех элементов визуальной поддержки, простоты и понятности используемых графических приемов.

Можно предложить простые упражнения на отработку изобразительных навыков. Мы не включали их в учебники, так как, по-видимому, не каждый учитель посчитает это необходимым. Но тем, кто заинтересуется этим направлением развития детей, мы предлагаем несколько упражнений.

Задача 16. На каждом из рисунков (рис. 29, *а*, *б*) отмечены восемь точек. Дорисуй каждую картинку так, чтобы получилось два разных изображения куба.

Задача 17. Заполняя плоские фигуры точками (рис. 30), сделай из них изображения пространственных.

Задача 18. На изображениях куба (рис. 31, *а*), прямого кругового цилиндра (рис. 31, *б*), прямого кругового конуса (рис. 31, *в*) нарисуй изображения буквы «Н», расположенной на их боковых поверхностях.

Задача 19. На каждом из рисунков (рис. 32, *а—е*) представлены три фигуры: квадрат (1), круг (2), треугольник (3). С помощью жирной линии расположи фигуры в таком порядке: а) 1, 2, 3; б) 2, 3, 1; в) 3, 1, 2; г) 1, 3, 2; д) 2, 1, 3; е) 3, 2, 1, где первая по порядку цифра обозначает, что соответствующая ей фигура является самой нижней.

В учебники мы включили задания на рисование в основном с использованием шаблонов и трафаретов. Отметим, однако, что постоянное их применение значительно сужает творческие возможности ученика и ограничивает развитие его представлений.

Чтобы обеспечить большее разнообразие возможных изображений, получаемых с помощью трафаретов, мы предлагаем детям сделать трафареты наборов эллипсов и параллелограммов. Их можно использовать для рисования как плоских, так и пространственных фигур: цилиндров, конусов, шаров и т. д., причем трафареты подобраны так, чтобы можно было, во-первых, изображать одну и ту же фигуру в разных положениях и, во-вторых, рисовать одинаковые фигуры, но разных размеров в одном и том же положении. Более того, эллипсы и параллелограммы связаны тем, что каждому параллелограмму как изображению квадрата соответствует свой эллипс как изображение окружности, в которую этот квадрат вписан.

Итак, можно сформулировать четыре основные задачи, которые решаются с помощью специально разработанного комплекса визуальной поддержки:

— научить ребенка правильно воспринимать изображение;

— пользоваться «аппаратом представления» как инструментом исследования абстрактного геометрического пространства;

— осуществлять вербально-визуальную координацию (выражать воспринимаемую информацию словами и по информации, выраженной текстом или речью, создавать представление);

— правильно выражать представление через чертежи и рисунки.

Эти задачи могут решаться не только с помощью иллюстративного материала учебников, но и другими составляющими комплекса визуальной поддержки: раздаточным материалом (тетради, листки самостоятельных и контрольных работ, домашние задания), оформлением кабинета (интерьер, плакаты, стенды), компьютерной графикой, динамической наглядностью (видеофильмы и анимационные фильмы), наглядными пособиями (моделями и конструктором).

1.5. Методические особенности одного типа задач

Важным методическим и педагогическим значением обладает серия задач на выделение лишнего объекта из набора изображений. Заметим прежде всего, что иллюстративный материал в таких задачах является источником информации. Поэтому надо стремиться к тому, чтобы заложенная в нем информация и способ ее графического представления максимально четко соответствовали поставленным задачам.

Что при этом мы можем развить? В первую очередь — логику. Это самая очевидная сторона подобных упражнений, поэтому мы не будем на ней останавливаться. Отметим, что здесь всегда есть возможность нескольких правильных ответов. Очень важно при решении таких задач учителю обращать внимание ученика на это, настаивать на его самостоятельном поиске всех вариантов правильного решения. Достоинство задач на определение лишних объектов, в которых возможны разные варианты ответов, — это их эффективность при устной работе в классе. В обсуждение и поиск решения можно включить значительное количество учеников, при этом у нескольких из них будет возможность высказать правильный ответ.

Приведем пример задачи и работы с ней.

Задача 20. Исключи лишнюю картинку из набора, представленного на рисунке 33.

Самый очевидный ответ — картинка *б*, так как изображенная на ней совокупность плоских фигур, в отличие от остальных, имеет форму параллелепипеда. Если же взять за отличительный параметр взаимное расположение плоских фигур на каждой картинке, то лишней окажется картинка *а*. При сравнении формы плоских фигур исключается картинка *г*. Можно заметить также отличительную черту плоских фигур, из которых составлен ци-

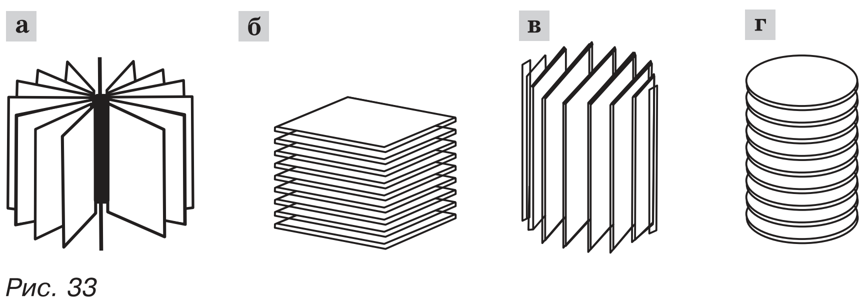


Рис. 33

линдр, изображенный на картинке *в*: не все они обладают одинаковыми размерами, хотя в остальных конструкциях участвуют только равные по форме и размерам плоские фигуры.

Опыт решения таких задач может выработать у учащихся готовность к многозначности познаваемого объекта, а также понимание того, что может существовать несколько правильных мнений, зависящих только от точки зрения или исходных данных. В связи с этим систематическое использование подобных упражнений представляется полезным и с педагогической точки зрения.

Приведем пример построения задачи, в которой каждая из четырех картинок может быть исключена из ряда. Предположим, что нам на четырех картинках надо отработать следующие понятия: цилиндр (1); цилиндр с боковой поверхностью, состоящей из граней (призма) (2); основание (3); вид сверху (4). Будем искать примеры среди моделей некаркасных пространственных фигур (5).

Представим нашу «методическую задачу» в виде таблицы:

	1	2	3	4	5
а)		×	×	×	×
б)	×		×	×	×
в)	×	×		×	×
г)	×	×	×		×

В таблице крестом указано, есть ли то или иное свойство у объекта, изображенного на соответствующей картинке. Таким образом, мы определили, что будет изображено на каждой картинке. Получилась такая задача:

Задача 21. Определи лишний среди объектов, изображенных на рисунке 34.

Отметим, что составление таких задач является не менее, а, может быть, даже более полезной формой работы с материалом. Однако составление задачи в полной форме,

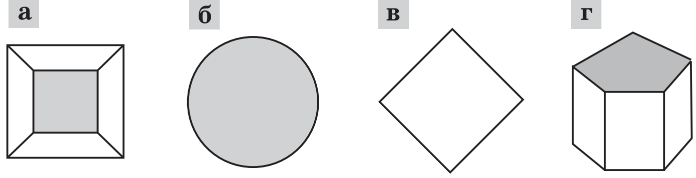


Рис. 34

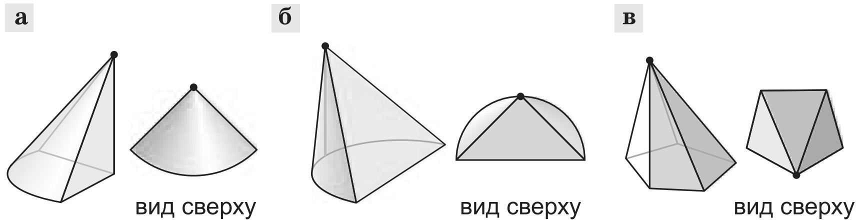


Рис. 35

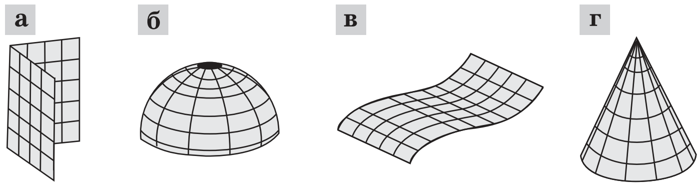


Рис. 36

т. е. с четырьмя вариантами правильных ответов, вряд ли посильно для среднего ученика пятого класса. Поэтому можно использовать обратную задачу: нарисовать объект, обладающий определенными свойствами.

Задача 22. Изобрази геометрическую фигуру так, чтобы:

1) она была видна сверху;
2) являлась конусом;
3) в ее боковой поверхности были грани;
4) среди отрезков, образующих конус, были такие, что видны точкой при виде сверху.

Варианты правильных ответов представлены на рисунке 35. При разборе получившихся результатов можно подробно остановиться на том, как размышляли учащиеся при изображении описанной фигуры. Очень полезно эту задачу предлагать в устной форме, на геометрических диктантах.

Задачу, в которой каждый из изображенных объектов обладает некоторым отличием от оставшихся, можно формулировать так:

Задача 23. Определи, чем похожи все фигуры и чем отличается каждая из нарисованных фигур от остальных (рис. 36).

Если такая задача кажется учителю слишком громоздкой, то можно начать с одной фигуры и сравнивать ее с некоторым рядом других фигур. Например:

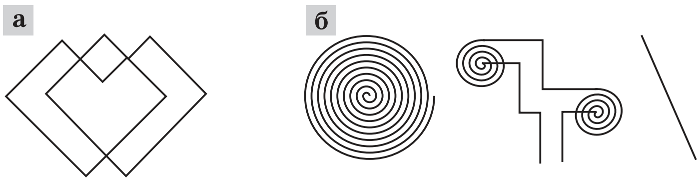


Рис. 37

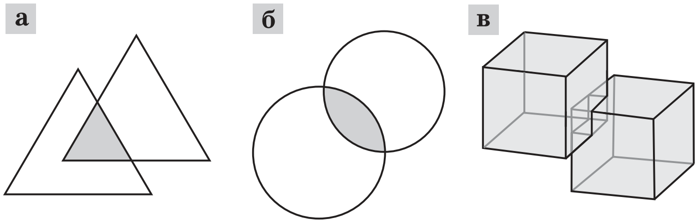


Рис. 38

Задача 24. Определи, чем фигура, изображенная на рисунке 37, *а*, отличается от других фигур, изображенных на рисунке 37, *б*.

Задача 25. Определи, чем объединены фигуры, изображенные на рисунке 38, и нарисуй фигуру, отличающуюся от них по этому признаку.

1.6. Электронная форма учебника

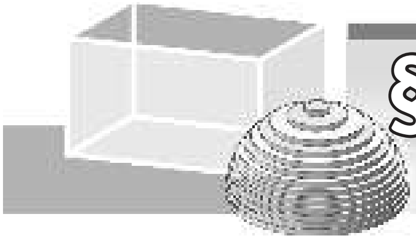
К данному курсу существует **Электронная форма учебника (ЭФУ)** — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональные особенности ЭФУ:

— удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;
— работа в онлайн- и офлайн-режимах;
— тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;
— возможность добавления материалов, созданных учителем;
— инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок;
— удобная навигация.

Педагогические возможности использования ЭФУ:

— организация контроля и самоконтроля по результатам изучения темы;
— реализация технологий мобильного, дистанционного или смешанного обучения;
— реализация требований ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.



§ 2 Структура курса «Наглядная геометрия»

2.1. Содержание курса

5 класс

1. Начальные понятия (геометрическая фигура; точка, линия, поверхность, тело; плоские и пространственные фигуры).
2. Отрезки (понятие отрезка, сравнение отрезков; конструирование из отрезков плоских и пространственных фигур: луч, прямая, ломаная, многоугольник; круг, цилиндр, конус; изображение фигур с разных точек зрения).
3. Углы (понятие плоского и двугранного угла, сравнение плоских углов, их виды, перпендикулярность; конструкции из углов).
4. Измерения (длина отрезка; площадь плоской фигуры, площадь прямоугольника; объем тела, объем прямоугольного параллелепипеда; градусная мера угла, транспортир).

6 класс

5. Повторение. Знакомые и новые понятия (в том числе отношение и пропорциональность отрезков, подобные фигуры, золотое сечение).
6. Взаимное расположение фигур (расстояния; параллельность на плоскости и в пространстве, применение параллельности для конструирования плоских и пространственных фигур; координаты).
7. Преобразования фигур (движения плоскости и пространства: параллельный перенос, поворот, симметрия центральная, осевая и зеркальная).
8. Конструкции из равных фигур (применение различных видов движений плоскости, построение бордюров и паркетов, элементы симметрии фигур).

2.2. Некоторые особенности предлагаемого курса

1. В учебниках содержится весь геометрический материал, предусмотренный программой. При этом материал дифференцирован. Не отмеченный звездочкой (*) может быть пройден в часы, отведенные базовым учебным планом на прохождение традиционного геометрического материала с добавлением из резерва 4—5 часов. Отмеченные звездочкой пункты и параграфы предназначены либо для дополнительной работы, либо для домашнего чтения.
2. Пособия написаны в форме учебника-собеседника с учащимся. Сама форма изложения материала, возможно, подскажет учителю методику работы.
3. В конце каждой книги имеются развертки пространственных фигур и шаблоны изображений геометрических фигур, рекомендованные учащимся для изготовления.

2.3. Примерное календарное планирование

Предполагается, что уроки геометрии проходят один раз в неделю в течение всего учебного года за счет времени, отведенного на прохождение геометрического материала, и отчасти резерва, который предусмотрен базовым учебным планом. В случае нехватки времени можно опустить весь материал, обозначенный в учебнике звездочкой. Мы предлагаем два варианта планирования: на 1 ч и на 2 ч в неделю в течение всего учебного года (34 ч и 68 ч соответственно).

5 класс

Параграф	Тема	Количество часов	
		34	**68**
	Введение	**1**	**2**
	Новый предмет — геометрия. Знакомство с учебником. Что такое геометрическая фигура	1	2
	Глава 1. Начальные понятия	**3**	**8**
§ 1	Итак, мы начинаем...	—	1
§ 2	Точка. Линия. Виды линий (пп. 2.1—2.3)	1	2
	Поверхность. Тело (п. 2.4)	1	1

Продолжение

Параграф	Тема	Количество часов	
		34	**68**
	Плоские и пространственные фигуры (п. 2.5)	1	2
	Решение задач	—	2
	Глава 2. Отрезки. Конструкции из отрезков	**16**	**28**
§ 3	Отрезок. Сравнение отрезков	1	1
§ 4	Луч. Числовой луч	1	1
§ 5	Прямая	1	1
§ 6	Ломаная. Длина ломаной (пп. 6.1, 6.2)	1	1
	Длина кривой (п. 6.3*)	—	1
§ 7	Треугольник. Элементы треугольника (пп. 7.1, 7.2)	1	1
	Виды треугольников (п. 7.3)	1	2
	Неравенство треугольника (п. 7.4)	1	2
	Конструкции из треугольников (п. 7.5*)	—	1
	Решение задач	—	2
§ 8	Круг и окружность. Их элементы. Способы построения круга (пп. 8.1—8.4)	1	2
	Как мы видим и рисуем круг (п. 8.5)	1	1
	Решение задач	1	2
§ 9	Цилиндр, его элементы. Виды цилиндров (пп. 9.1—9.3)	1	2
	Прямоугольный параллелепипед (п. 9.4)	1	2
	Как рисуют цилиндры (п. 9.5)	1	1
§ 10	Конус, его элементы. Виды конусов (пп. 10.1—10.4)	1	2
	Как рисуют конусы (п. 10.5)	1	2
	Решение задач	1	1

Продолжение

<table>
<tr><th rowspan="2">Пара-
граф</th><th rowspan="2">Тема</th><th colspan="2">Количество часов</th></tr>
<tr><th>34</th><th>68</th></tr>
<tr><td></td><td>Глава 3. Углы. Конструкции из углов</td><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">§ 11</td><td>Двугранный угол. Его элементы (п. 11.1)</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Плоский угол. Его элементы (пп. 11.2—11.4)</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">§ 12</td><td>Сравнение углов.
Построение угла, равного данному.
Построение биссектрисы угла (пп. 12.1, 12.2)</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Виды углов (пп. 12.3, 12.4)</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Чертежный треугольник (п. 12.5).
Перпендикуляр к прямой (п. 12.6)</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Перпендикуляр к плоскости (п. 12.7)</td><td>—</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">§ 13</td><td>Новая классификация треугольников</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Решение задач</td><td>—</td><td>3</td></tr>
<tr><td>§ 14*</td><td>Многогранные углы</td><td>—</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Глава 4. Измерения</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">§ 15</td><td>Измерение отрезков (пп. 15.1, 15.3)</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Различные меры длины (п. 15.2*)</td><td>—</td></tr>
<tr><td rowspan="2">§ 16</td><td>Площадь плоской фигуры.
Площадь прямоугольника (пп. 16.1—16.3)
Площадь треугольника (п. 16.4)
Единицы измерения площади (п. 16.5)</td><td>2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Из истории мер площади (п. 16.6*)</td><td>—</td></tr>
<tr><td rowspan="2">§ 17</td><td>Объем тела. Объем прямоугольного параллелепипеда (пп. 17.1—17.4).</td><td>1</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Различные единицы объема (п. 17.5*)</td><td>—</td></tr>
<tr><td>§ 18</td><td>Измерение углов. Транспортир</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Решение задач</td><td>—</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Контрольная работа</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Резерв</td><td>—</td><td>6</td></tr>
</table>

6 класс

Параграф	Тема	Количество часов	
		34	**68**
	Глава 1. Повторение. Знакомые и новые понятия	**5**	**10**
§ 1—4	Повторение. Хорда, перпендикулярность (в том числе прямой и плоскости)	2	3
§ 5	Алгоритмы	1	2
§ 6	Отношение отрезков. Подобие фигур. Масштаб (пп. 6.1—6.3)	2	2
	Некоторые замечательные отношения в геометрии (пп. 6.4*—6.6*)	—	3
	Глава 2. Взаимное расположение фигур	**14**	**25**
§ 7	Расстояния (между точками, от точки до фигуры: прямой и плоскости) (пп. 7.1—7.4)	2	3
	Высоты геометрических фигур (п. 7.5)	1	2
§ 8	Параллельность. Параллельные прямые: определение и построение (пп. 8.1—8.3)	2	3
	Скрещивающиеся прямые (п. 8.4)	1	1
	Решение задач	1	2
§ 9	Четырехугольники с параллельными сторонами (пп. 9.1, 9.2)	2	3
	Решение задач	1	1
	Получение фигур из параллельных отрезков (пп. 9.3, 9.4)	1	3
	Получение пространственных фигур из плоских фигур (пп. 9.5*, 9.6*)	—	1
	Как мы видим и рисуем параллельные отрезки (п. 9.7*)	—	1
§ 10	Где мы встречаемся с координатами	1	1
§ 11	Прямоугольные координаты на плоскости	1	1

Продолжение

Параграф	Тема	Количество часов	
		34	**68**
	Решение задач	—	2
	Контрольная работа	1	1
	Глава 3. Движения фигур	**7**	**15**
§ 12	Понятие преобразования фигуры	1	1
§ 13	Параллельный перенос	1	2
	Решение задач	—	1
§ 14	Поворот фигуры на плоскости	1	1
§ 15*	Пространственный поворот фигуры. Фигуры вращения	—	3
§ 16	Осевая симметрия фигур	1	2
	Решение задач	1	1
§ 17	Центральная симметрия фигур	1	2
§ 18*	Зеркальная симметрия	—	1
	Контрольная работа	1	1
	Глава 4. Конструкции из равных фигур	**8**	**15**
§ 19	Пересечение и объединение фигур (пп. 19.1, 19.2)	1	2
	Склеивание фигур (пп. 19.3, 19.4)	1	2
§ 20	Применение параллельного переноса	1	2
§ 21	Применение поворота	1	2
§ 22	Применение осевой симметрии	1	2
§ 23	Использование разных видов движений	1	2
§ 24	Фигуры, обладающие симметрией	1	2
	Заключительный урок	1	1
	Резерв	—	**3**

§ 3 Краткие методические замечания к конкретным темам курса

3.1. 5 класс

Введение

Первый урок геометрии мы считаем очень важным и потому остановимся на нем более подробно.

На этом уроке важно сформировать у учащихся понимание того, что геометрия стоит в одном ряду с географией, биологией, физикой и другими науками, изучающими окружающий мир. Каждый школьный учебный предмет изучает этот мир со своей точки зрения (климата и строения земли, жизни растений и животных, законов движения и теплоты и т. д.). Геометрия же изучает его с точки зрения формы, размеров предметов и взаимного расположения этих предметов или их деталей. И эти свойства предметов мы будем называть *геометрическими*.

Всякая наука имеет свой язык (терминологию, с помощью которой формулируются и изучаются законы этой науки). Геометрия использует два языка: словесный, или вербальный (от лат. *verbalis* — устный, словесный), и зрительный, или визуальный (от лат. *visualis* — зрительный). Это означает, что для передачи геометрической информации мы будем пользоваться в равной степени словами и картинками, изображающими геометрические свойства предметов. Такие картинки мы будем называть *геометрическими фигурами*. Иначе говоря, на первом этапе изучения геометрии под геометрической фигурой мы будем понимать картинку, изображающую мысленный образ предмета, в котором сохранены только геометрические свойства этого предмета: форма, размеры и (или) взаимное расположение его деталей. При этом (в зависимости от того, какие свойства предмета для нас сейчас являются существенными) мы можем использовать различные геометрические фигуры для описания одного и того же предмета. Так, например, столб мы можем изобразить точкой, отрезком, прямоугольником, цилиндром. С такого уровня абстракциями дети уже знакомы: их не удивляет, что буква — это картинка, изображающая звук, цифра — картинка, изображающая количество предметов. При этом один и тот же звук (например, [а]) мы можем изобразить различными картинками в зависимости от выбранного шрифта или языка.

Курс наглядной геометрии, к изучению которого мы приступаем, состоит из двух частей. Материал 5 класса в основном посвящен изучению форм и размеров предметов (построению геометрических фигур и их измерению). В 6 классе мы познакомимся с вопросами взаимного расположения различных геометрических фигур, а также с их преобразованиями.

§ 1. Итак, мы начинаем...

Включение в учебный процесс игрового момента не обязательно. Наоборот, во многих случаях игровой момент может сыграть отрицательную роль как в учебном процессе, так и в развитии некоторых качеств характера учащихся. Геометрия содержит в себе достаточно разнообразный и интересный для ребенка материал, позволяющий переключать внимание и осуществлять необходимую смену деятельности на уроке. Тем не менее авторы вводят ученика в курс геометрии именно через геометрические игры, которые в первую очередь имеют дидактический характер. В учебниках игр мало, и их всего три вида: действия с отрезками (спичками), простейшими плоскими и пространственными фигурами (танграмом и кубиками). Одна из целей этих игр — подготовка раздаточного материала для изучения различных тем: отрезков, площади плоской фигуры, объема тел и др. Кроме того, это хороший материал для дополнительных занятий.

§ 2. Как можно получить геометрические фигуры

При изучении начальных понятий важными с математической точки зрения являются следующие моменты:

1. Понятия *точка, линия, поверхность, тело* связаны между собой одинаковым способом построения: каждая следующая фигура может быть получена из предыдущей непрерывным ее перемещением в пространстве.
2. Все незамкнутые линии могут быть получены непрерывной деформацией отрезка, а все замкнутые — непрерывной деформацией окружности. В связи с этим к отрезкам и окружностям мы относимся более внимательно, чем к другим произвольным линиям. При изу-

чении замкнутых и незамкнутых линий очень полезно использовать на уроке различного рода веревочки и резинки, деформируя которые удобно получать всевозможные линии, в том числе и ломаные.

3. Заметим, что иногда пространственные фигуры называют объемными. Мы такой термин не употребляем по двум причинам. Во-первых (и это главное), такого термина в математике нет. А во-вторых, интуитивно слово «объемный» может обозначать «имеющий объем», что для многих пространственных фигур противоестественно: пространственные (как и плоские) линии и поверхности имеют одинаковый объем, равный нулю.

§ 3—5. Отрезки. Луч. Прямая

Обратим внимание учителя на то, что в наглядном курсе основным понятием естественно, на наш взгляд, взять отрезок (а не прямую), следуя Евклиду, а затем А. Д. Александрову, так как отрезок легко смоделировать, а потому и представить себе. А луч и прямая получаются построением из отрезка с помощью его продолжения.

Возможно, подробного обсуждения потребует само понятие продолжения отрезка. Здесь важно подчеркнуть: говорят, что отрезок BC является продолжением отрезка AB, если точка B лежит на отрезке AC. Проверяем это с помощью линейки.

Формированию представления неограниченности луча (и прямой) может способствовать обсуждение, например, следующих вопросов:

1. Есть ли на числовом луче такие точки, которые изображают числа 1000, 999 919?
2. Какой из нарисованных лучей короче?
3. Как можно из двух лучей получить прямую?
4. Можно ли продлить прямую?

5*. Что длиннее, луч или прямая?

§ 6. Ломаная

Поскольку с плоскими и пространственными фигурами дети познакомились при изучении «Введения», то в этом параграфе нет отдельных разговоров о плоских и пространственных ломаных. Они естественным образом рассматриваются одновременно. При этом, конечно, очень полезно (и важно!) пользоваться каркасными моделями многогранников для облегчения формирования устойчивого образа пространственной ломаной и обучения наглядному изображению таких линий.

Среди разнообразных ломаных линий, рассматриваемых на уроках, важно поговорить о так называемых простых ломаных — тех, которые не имеют самопересечений и самоналеганий. По техническим причинам разговор о таких линиях выпал из текста учебника, но в определении многоугольника (в следующем параграфе) понятие простой ломаной фигурирует.

§ 7. Треугольник

Под треугольником в этом курсе понимается не только замкнутая трехзвенная ломаная, но и часть плоскости, ограниченная этой ломаной. Такое определение удобно по разным соображениям: во-первых, в таком случае легко сделать модель треугольника; во-вторых, у таких треугольников есть внутренние точки и существует площадь, отличная от нуля. Кроме того, в дальнейшем (в старших классах) медиана, биссектриса, центр тяжести будут принадлежать треугольнику, что психологически представляется естественным.

Разговор о том, что многоугольником называется *меньшая часть плоскости*, ограниченная простой плоской замкнутой ломаной, можно проводить в разных классах на разных уровнях. В сильном классе можно поговорить и о том, что понятия «большая» и «меньшая» часть плоскости мы не определяли и понимаем их на интуитивно-наглядном уровне. В то же время *большая часть плоскости*, хотя и ограничена ломаной, простирается на плоскости неограниченно. Однако это трудный для детей разговор, и его, конечно, можно проводить только с очень хорошо подготовленными детьми.

При обсуждении классификации треугольников по сторонам важно подчеркнуть, что речь идет о классификации двух множеств: всех треугольников (на два класса: имеющих и не имеющих равные стороны) и равнобедренных треугольников (тоже на два класса: все стороны которых равны между собой и не все стороны которых равны между собой).

§ 8. Круг и окружность

В этом параграфе мы впервые встречаемся с мысленным (непрерывным) конструированием: представляем себе, как из бесконечного множества равных между собой отрезков можно получить круг. Это конструирование иллюстрируем с помощью кисти и краски. Очень важным в этом параграфе является пункт 8.5 «Как мы видим и рисуем круг». Здесь закладываются основы навыков рисования и ви́дения предметов в разных ракурсах. Используя шаблоны эллипсов, приведенные в приложении, можно научить ученика изображать различные круглые предметы и конструировать изображения новых форм.

§ 9—10. Цилиндры. Конусы

Порядок знакомства учащихся с цилиндрами не традиционен: от общего понятия цилиндра — к круговому цилиндру, призме, а затем параллелепипеду. Так же и с конусами: от общего понятия — к круговому конусу, а затем к пирамиде. Авторы отдают себе отчет в том, что у учителя и тем более у родителей могут возникнуть психологические трудности. Тем не менее они остановились именно на такой последовательности изложения, во-первых, потому, что это верно с точки зрения математики, и, во-вторых, потому, что рассуждения от общего к частному являются весьма полезными для учащихся с точки зрения их логического развития. Кроме того, опыт показывает, что конструирование цилиндров и конусов общего вида, а затем получение таким же способом знакомых геометрических фигур (параллелепипеда, пирамиды) вызывает большой интерес у учащихся и создает довольно полный и правильный образ изучаемых фигур.

При изучении этих тем исключительно полезными являются геометрические экскурсии (см. с. 76).

§ 11. Угол

В разделе, посвященном углам, нетрадиционным является только подход к понятию плоского угла: через двугранные углы. Авторы здесь руководствовались тем, что представить себе двугранный угол легче, чем плоский. При рассмотрении модели двугранного угла с разных сторон дети, как правило, сами дают определение плоского угла. Учителю остается лишь уточнить: под двугранным углом обычно в геометрии понимают две полуплоскости (без части пространства, ими ограниченной), а под плоским углом мы будем понимать не только два луча, но и часть плоскости, которую они ограничивают.

Подчеркнем еще раз: под плоским углом мы понимаем часть плоскости, ограниченную двумя лучами, исходящими из одной точки (а не только эти лучи). Это означает, что два луча, исходящие из одной точки, образуют два плоских угла, один из которых не меньше развернутого. В дальнейшем, если нет соответствующей оговорки, мы работаем только с углами, не бо́льшими развернутого. Такой подход удобен с разных точек зрения, например, потому, что биссектриса угла ему принадлежит, что сумма двух углов — это угол, а не четыре луча и т. д.

При обсуждении понятия плоского угла снова может возникнуть вопрос: какая сторона угла длиннее? Этот, естественный с точки зрения ребенка, вопрос, конечно же, опять (как и в теме «Луч») подлежит подробному обсуждению.

§ 12. Сравнение углов

Особого внимания здесь требует понятие прямого угла. По-видимому, правильной последовательностью знакомства детей с прямым углом можно считать такую: получение прямого угла из листа бумаги, построение его в различных положениях с помощью чертежного треугольника, нахождение различных прямых углов на моделях многогранников, а затем изображение этих углов, расположенных не в плоскости чертежа. При этом, научившись изображать прямоугольный параллелепипед, например, с помощью трафарета, дети не удивляются, что прямой угол, расположенный не в плоскости чертежа, может быть изображен произвольным углом.

§ 13. Еще раз о видах треугольников

Материал этого параграфа является исключительно важным в плане знакомства детей с классификацией различных предметов. Особенно ценной с точки зрения общего логического развития является возможность проведения классификации одних и тех же объектов по различным основаниям.

Проверку усвоения классификаций треугольников можно проводить на разном уровне: с использованием изображения пространственных фигур и без него.

§ 14*. Многогранные углы

Материал о многогранных углах введен авторами в учебник для завершения формирования представлений учащихся об углах. В результате знакомства с этим материалом учащиеся должны хорошо представлять себе различные многогранные углы, находить их на моделях многогранников и на реальных предметах, а также моделировать из картона. Здесь возможны различные творческие задания, в том числе склеивание многогранников.

§ 15—17. Длина. Площадь. Объем

Понятия длины отрезка, площади прямоугольника, объема прямоугольного параллелепипеда знакомы детям из начальной школы, поэтому они вполне могут в течение всего учебного года пользоваться известными формулами как для решения арифметических задач, так и для иллюстрации переместительного и сочетательного законов сложения и умножения целых и дробных чисел.

Цель материала, представленного в четвертой главе учебника, — показать единство понятий, свойств и способов измерений длины отрезка, площади плоской фигуры, объема тела.

Новым материалом в этих параграфах являются некоторые единицы измерения площади и объема, с которыми дети раньше не встречались. Заметим, что если учитель считает необходимым, эти единицы измерения можно дать детям на уроках арифметики.

При решении задач этих параграфов полезно подчеркивать, что при изменении единицы измерения длины (площади, объема, меры угла) изменяется *значение* этой величины (но не сама величина).

В пункте 16.4 в ходе решения задач объясняется, как можно вычислить площадь треугольника: сначала прямоугольного (достраиванием до прямоугольника), а затем и произвольного — с помощью его разбиения на прямоугольные треугольники. Здесь пока еще не вводится понятие высоты треугольника, о которой пойдет речь в 6 классе. Там и будет дано обобщение выведенной здесь формулы.

§ 18. Измерение углов

Материал этого параграфа вполне традиционен. Отметим лишь, что при изучении этой темы полезно сравнить ее с предыдущими. Полезно показать при этом, что, с одной стороны, введение градусной (или какой-нибудь другой) меры угла совершенно аналогично введению меры длины или площади. Но с другой стороны, есть важное отличие: какое бы мы ни взяли число (положительное, разумеется), всегда можно построить такой отрезок, длина которого равна этому числу. Иначе говоря, среди отрезков нет такого, который имел бы самую большую длину (так же, как среди плоских и пространственных фигур нет фигуры, имеющей наибольшую площадь или объем). Для углов в геометрии это не так: не бывает углов, больших полного, а потому, например, для числа 1000 нельзя построить угол, который равен 1000°.

3.2. 6 класс

Повторение. Знакомые и новые понятия

Вопросам повторения в пособии отводится целая глава. Этим подчеркивается значимость повторения.

Вводное занятие следует, на наш взгляд, посвятить обсуждению общей структуры курса, который изучают дети. И здесь важно подчеркнуть следующие моменты:

1. Геометрия изучает *форму*, *размеры* и *взаимное расположение* предметов или их частей. В 5 классе мы в основном занимались изучением различных форм и измерением некоторых величин. В 6 классе основное внимание будем уделять взаимному расположению фигур и их преобразованиям.
2. При изучении геометрии мы пользуемся двумя способами передачи своих мыслей: словесным (вербальным: *verbum* — слово, речь) и с помощью картинок (визуальным: *visio* — видение). Картинки используем для геометрического описания как формы предметов, так и некоторых процессов, которые с этими предметами могут происходить. Форму предмета изображаем геометрической фигурой, которая является его мысленным образом. Чтобы создать этот образ, мы отвлекаемся (не учитываем, абстрагируемся) от всех свойств предмета, кроме формы, размеров и взаимного расположения его деталей.
3. Весь курс 5 класса был посвящен простейшим геометрическим фигурам — отрезкам и углам. И изучали мы их по одной схеме: сначала просто познакомились с ними, затем рассмотрели различные конструкции из них. В 6 классе по такой же схеме будем изучать преобразования фигур: сначала познакомимся с ними, а затем поймем, как они могут быть использованы для получения новых фигур.
4. Одним из средств изучения геометрии для нас было конструирование. При этом мы, как правило, производили реальное конструирование моделей фигур из палочек, спичек, ниток, картона. Теперь мы часто будем конструировать фигуры мысленно, например, непрерывно перемещая на плоскости или в пространстве точку, линию или какую-нибудь другую фигуру.
5. Повторяя материал 5 класса, мы увидим, что даже в том, что, как нам кажется, хорошо знаем, есть много того, что нам не известно, и поэтому всегда полезно возвращаться к уже знакомым вещам и смотреть на них с новой, может быть, неожиданной точки зрения.

§ 1—4. Какие геометрические фигуры бывают

На наш взгляд, можно через решение соответствующих задач провести обобщенное повторение изученных в 5 классе фигур: сначала назвать нарисованные на доске различные фигуры, затем сформулировать их определения, построить (нарисовать в тетради) некоторые из них и решить предложенные в учебнике задачи (по усмотрению учителя). Обсуждения требуют те понятия, которые являются новыми для школьников.

Например, в § 3 вводится общее определение *хорды* фигуры. Это сделано из следующих соображений.

Во-первых, в математике такое понятие существует и в некоторых разделах довольно активно используется. А мы еще в 5 классе рассматривали некоторые нетрадиционные для школы понятия, которые соответствуют общематематическим представлениям. Например, обсуждали вопросы, связанные с измерением кривой, давали общее определение цилиндра и конуса.

Во-вторых, цель данного курса — подготовить учащихся к восприятию систематического курса геометрии 7—11 классов независимо от того, по какому учебнику геометрии будет учитель работать в дальнейшем. В некоторых учебниках, например А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика и Т. Г. Ходот «Геометрия — 7, 8, 9» (следуя А. Д. Александрову), вся теория углов и треугольников строится на понятии хорды угла. Это существенно облегчает и укорачивает изложение теории: в 7 классе остается всего лишь 8 теорем, обязательных для запоминания учащимися. Учитель, который не собирается работать по указанному учебнику, может опустить пункт 3.2.

В этом же параграфе вводится определение *диагонали* многоугольника, рассматриваются пространственные аналоги круга и окружности — *шар* и *сфера*.

В § 4 происходит первое знакомство с *правильными многоугольниками*, которые потом (в § 21) будут подробно обсуждаться. Важной является задача 4.15. Желательно ее решить в классе с использованием циркуля и линейки, так как в дальнейшем умение производить такие построения будут полезны при изучении главы 3. Можно решить эту задачу, записав алгоритм ее решения, рассматривая § 5.

§ 5. Алгоритмы

Вводимое здесь понятие алгоритма имеет характер общеобразовательный. В дальнейшем будут введены специальные пиктограммы и с их помощью будут активно использоваться алгоритмы в § 23—24 для сокращения записи последовательности применения движений при получении паркетов, бордюров, орнаментов.

§ 6. Отношения в геометрии

Тема «Отношения в геометрии» помещена в главе 1, так как она является последней в части, посвященной изучению форм предметов. Кроме того, ее естественно связать с арифметической темой «Отношения», и, если учитель сочтет это целесообразным, геометрический и арифметический подход к этой теме можно объединить. При этом нам представляется полезным начинать объяснение понятия *пропорция* с геометрических примеров. (Действительно, а иначе как объяснить, чем равенство двух отношений лучше равенства двух сумм или двух произведений? Почему мы изучаем пропорции, а не какие-нибудь другие равенства?) Оказывается, отношение некоторых отрезков в предмете определяет его форму, и фигуры, для которых эти отношения одинаковые, имеют одну и ту же форму. Таким образом, появляется возможность от интуитивного представления о форме предметов перейти к строгому определению: вводится понятие подобных фигур. Говорят, что две фигуры подобны, если их соответствующие отрезки пропорциональны.

Этот параграф содержит много материала по теме «Гармоническая пропорция» («Золотое сечение»), который может стать основой для дополнительной (кружковой или самостоятельной) работы учащихся.

§ 7. Расстояния

Отметим следующие два момента:

1. Дается общее понятие расстояния от точки до фигуры в соответствии с принятым в математике определением. Затем основное внимание уделяется расстояниям от точки до прямой и от точки до плоскости.
2. Обсуждение понятия высоты геометрической фигуры начинается с рассмотрения пространственных фигур, так как само слово «высота» связывается у нас в первую очередь с третьим измерением после длины и ширины. Сначала говорится о высоте предмета, затем о высоте модели геометрической фигуры на примере пирамиды. На первом этапе мы смотрим на высоту предмета или модели геометрической фигуры как на *расстояние* от самой высокой ее точки до плоскости основания (до плоскости, на которой стоит эта модель).

И только после этого формулируем традиционное для школьного курса определение высоты пирамиды как перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания. По аналогии с высотой пирамиды дается определение высоты треугольника. (Полезно на уроке сначала поработать с картонной моделью треугольника, расположенной в плоскости, параллельной плоскости доски.) Здесь важно подчеркнуть, что мы часто встречаемся с ситуацией, когда одно и то же слово употребляется в различных смыслах (класс, кол и др. — дети и сами приведут соответствующие примеры). Выведенная в 5 классе формула вычисления площади треугольника переписывается в привычном для нас виде — с использованием понятия его высоты.

Задачи 7.14 и 7.15 являются подготовительными к введению понятия параллельности.

§ 8. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Интуитивное представление параллельности вводится через расстояние. После создания представления о парах параллельных окружностей, прямых, плоскостей формулируются традиционные определения параллельных прямых, плоскостей, прямой и плоскости. Обратим внимание учителя на то, что, рассматривая на интуитивном уровне параллельные прямую и плоскость, мы все время говорим о том, что прямая параллельна плоскости, а не наоборот, так как точки плоскости не одинаково удалены от прямой. Традиционное определение параллельности прямой и плоскости снимает эти «неприятности», так как при таком определении параллельность обладает свойством симметричности.

При изучении этого параграфа важно сформировать навыки детей строить параллельные прямые: эти навыки будут использоваться в дальнейшем, например при изучении параллельного переноса фигур.

В этом параграфе дети знакомятся с новым случаем взаимного расположения двух прямых — со скрещивающимися прямыми. При этом ключевым понятием для создания первичных представлений опять является понятие расстояния.

§ 9. Фигуры, составленные из параллельных отрезков

Здесь мы сталкиваемся с мысленным конструированием фигур, проводя аналогию с получением круга из отрезков. В этом параграфе впервые встречаются слова: образующая и направляющая. Их определения не формулируются. Важно, чтобы дети понимали, *что образует* фигуру и *как направляется* движение образующей. Понятия образующей и направляющей будут использованы и в дальнейшем.

Пункты 9.5 и 9.6 могут стать базой для занятий в творческой мастерской, пункт 9.7 носит общекультурный характер и может стать основой для докладов или рефератов школьников.

§ 10—11. Известные примеры координат. Разные системы координат

Эти параграфы в значительной степени носят общеобразовательный характер. Обязательным для изучения является лишь пункт 11.2.

§ 12. Понятие преобразования фигуры

Тема «Преобразование фигур» является чуть ли не самой трудной в курсе геометрии средней школы. Тем более важно сформировать у учащихся правильное представление об этом понятии, прежде чем его формализовать и работать с ним. Отметим следующие моменты:

1. Очень важно добиться от учащихся понимания различия между физическим (реальным) и геометрическим понятиями преобразования: в физике изучают процесс изменения предмета или его положения в пространстве, а в геометрии интересуются лишь начальным и конечным положением фигуры и каждой ее точки. Физическое преобразование мы иногда называем процессом.
2. До настоящего времени мы работали с геометрическими фигурами как с мысленными образами реальных предметов. Изучая преобразования фигур, будем смотреть на них и как на множества точек. А потому будем говорить об образах точек данной фигуры. Полезно поэтому, приступая к изучению главы 3, не вдаваясь в детальные рассуждения, порешать с детьми задачи на выяснение того, принадлежат ли указанные точки данной фигуре. Понятие «прообраз фигуры» мы в дальнейшем нигде не используем, поэтому его и не вводим.

Чтобы не загромождать свою речь, вместо фразы «Одна фигура является образом другой при некотором преобразовании» будем говорить, что эти фигуры связаны друг с другом данным преобразованием.

§ 13—16. Параллельный перенос и поворот фигуры на плоскости и в пространстве. Осевая симметрия фигур

Все виды движений плоскости изучаются по одному плану: сначала определяем изучаемый вид движения, затем учимся его распознавать, работая с калькой, строить образы точки, отрезка, луча, прямой и окружности и, наконец, строим образы различных фигур. Движения плоскости и пространства рассматриваются в тесной взаимосвязи: происходит переход от поворота плоскости вокруг точки к повороту этой плоскости вокруг прямой, перпендикулярной плоскости, а затем к повороту пространства вокруг прямой. К осевой симметрии плоскости подходим, наоборот, от пространственного поворота вокруг прямой. Таким образом, осевая симметрия плоскости является частным случаем поворота в пространстве, и поэтому понятно, почему симметричные фигуры можно получить перегибанием листа бумаги и откуда появляется вводимое определение точек, симметричных друг другу относительно прямой.

§ 17. Центральная симметрия фигур

Обратим внимание учителя на то, что центральная симметрия плоскости не определяется как поворот плоскости вокруг точки на $180°$. Дается общее для плоскости и пространства определение: симметрией фигуры с центром в точке O называется такое ее преобразование, что для любой точки M и ее образа M_1 точка O является серединой отрезка MM_1. При таком определении центральная симметрия на плоскости является частным случаем пространственной. На плоскости она действительно совпадает с поворотом, поэтому для распознавания на рисунке центрально симметричных фигур, лежащих в одной плоскости, можно пользоваться калькой (например, в задачах 17.1 и 17.3).

Задача 17.6 является сложной для многих детей. Однако ее обсуждение на уроке очень полезно. Результат этого обсуждения может быть использован при решении задачи 17.7 и в дальнейшем при рассмотрении центра симметрии параллелограмма.

§ 18*. Симметрия фигур относительно плоскости

Последний параграф из главы 3 отмечен звездочкой не потому, что является трудным, а потому, что в случае нехватки времени его можно пропустить без ущерба для логики курса.

Глава 4 является завершающей в рассматриваемом курсе. С идейной точки зрения эта глава является очень важной, ибо в ней мы «замыкаем круг», начатый в 5 классе: от реальных объектов — к их мысленным образам, геометрическим фигурам — и затем снова к созданию реальных предметов на базе имеющихся геометрических знаний (с использованием склеивания фигур, связанных некоторым преобразованием).

При наличии у учителя времени и возможностей материал этой главы может стать геометрической основой для организации в классе творческой мастерской по выполнению различных художественно-графических работ, а также по изготовлению изделий из картона, ниток, бумаги.

§ 19. Использование движений для получения новых фигур

В этом параграфе вводятся понятия пересечения и объединения фигур. Новым для школьного курса геометрии является понятие склеивания фигур. Для детей оно не представляет никаких трудностей: склеить две фигуры можно в том случае, когда они имеют «достаточно хорошую» общую границу; склеивание фигур состоит в нахождении объединения таких фигур.

§ 20. Применение параллельного переноса

Изучая параллельный перенос, можно научить детей строить простейшие бордюры, орнаменты и паркеты и показать, как, проявляя фантазию, получить достаточно интересные (а может быть, и трудные) конструкции. Этот материал дает учителю серьезный аппарат для развития детских творческих способностей.

§ 21. Применение поворота

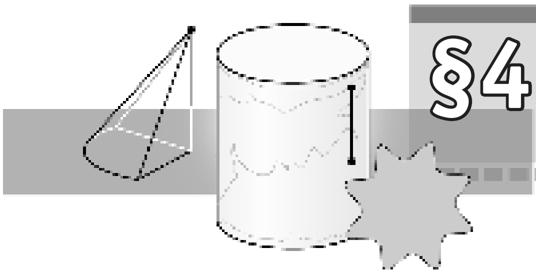
В отличие от предыдущего параграфа построение (конструирование) здесь происходит мысленное: появляются правильные многоугольники и правильные пирамиды и призмы.

§ 22—23. Применение осевой симметрии и использование разных видов движений для получения новой фигуры

Для облегчения записи последовательности применения преобразований авторы ввели алгоритмы, записывая эти последовательности с помощью пиктограмм. Авторы считают такую запись алгоритмов удобной и короткой. Если учитель считает, что для детей его класса введение пиктограмм усложняет процесс, то, конечно, можно обойтись и без них. Материал этих параграфов может быть и общеразвивающим, и базой для разного рода творческих работ учащихся.

§ 24. Фигуры, составленные из равных частей

Обычно дети знакомятся с симметричными фигурами при их предъявлении и рассматривании. Здесь авторы предлагают для этих целей построение, выполняемое в том числе и детьми. И поскольку образы фигур при различных движениях дети строить уже умеют, фигуры, обладающие различными симметриями (осевой, поворотной, переносной, зеркальной), появляются для них естественным путем. А понятия этих симметрий хорошо усваиваются потому, что есть соответствующие представления и конструктивный опыт.



§4 Примерные варианты самостоятельных и контрольных работ

Мы представляем здесь работы в основном среднего уровня, имея в виду только приблизительную ориентацию учителя на предполагаемый авторами уровень усвоения учащимися материала, и не претендуем на обязательность выполнения учащимися именно таких работ. Учитель по своему усмотрению, конечно же, составит свои самостоятельные и контрольные работы или не будет проводить их вовсе.

4.1. 5 класс

Самостоятельная работа 1 по теме «Линии»

1. Отметь две точки P и Q и нарисуй кривую линию с началом в точке P, проходящую через точку Q. Сколько таких линий ты можешь нарисовать?
2. Выпиши точки: а) через которые проходит линия (рис. 39); б) которые не лежат на этой линии.

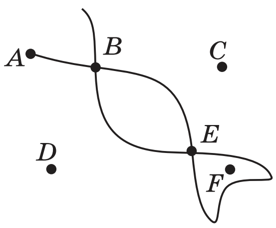


Рис. 39

Самостоятельная работа 2 по теме «Отрезки. Сравнение отрезков»

1. На сколько отрезков разбит отрезок PQ точками A и D (рис. 40)? Выпиши названия всех получившихся отрезков.
2. С помощью циркуля сравни два отрезка (рис. 41).

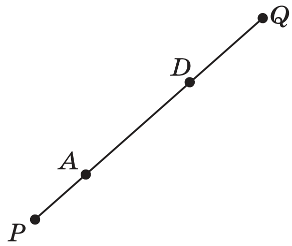


Рис. 40

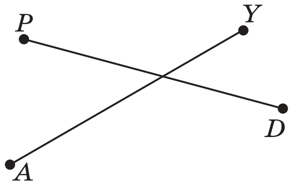


Рис. 41

Самостоятельная работа 3 по теме «Луч. Прямая»

1. Отметь в тетради точки A, B, C. Начерти лучи AB, BC, CA.

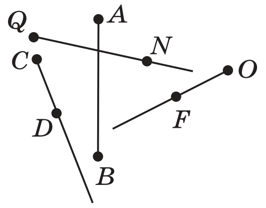


Рис. 42

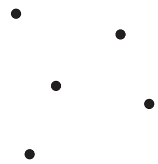


Рис. 43

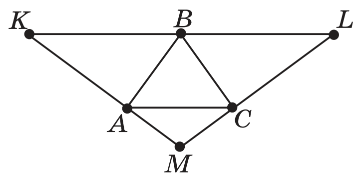


Рис. 44

2. Назови все лучи, изображенные на рисунке 42. Какие из них пересекают отрезок AB?
   Отметь в тетради точки H и K. Проведи прямую через эти точки. Назови фигуры, на которые разбивают прямую эти точки.

***Самостоятельная работа* 4**
по теме «Ломаная»

1. Нарисуй трехзвенную ломаную. Назови ее и выпиши названия всех ее звеньев.
2. Нарисуй разными цветными карандашами две замкнутые ломаные с вершинами в данных точках (рис. 43). Назови эти ломаные. Измерь их длины и сравни эти длины.

***Самостоятельная работа* 5**
по теме «Треугольник»

1. Выпиши названия равносторонних, равнобедренных, разносторонних треугольников, изображенных на рисунке 44.
2. Начерти треугольник, назови его. Выпиши названия всех его вершин и сторон. Измерь стороны треугольника и вычисли его периметр.

***Самостоятельная работа* 6**
по теме «Круг. Окружность»

1. Построй круг радиусом 3 см 4 мм. Отметь точки M, N, K, принадлежащие кругу; точки S и P, не лежащие на окружности, ограничивающей этот круг; точки C и D, лежащие на границе круга.
2. Используя шаблоны эллипсов, нарисуй какой-нибудь круглый предмет.

3*. Построй окружность с центром в точке O и радиусом 3,5 см. Построй хорду AB так, чтобы периметр треугольника OAB был равен 10 см.

4*. Можно ли построить такую хорду CD окружности из задачи 3, чтобы периметр треугольника OCD был равен: а) 8 см; б) 15 см? Ответ обоснуй.

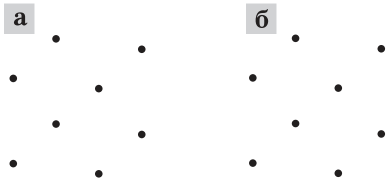


Рис. 45

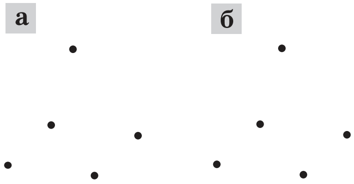


Рис. 46

***Самостоятельная работа* 7**
по теме «Цилиндры»

1. На столе находятся пронумерованные модели геометрических фигур. Выпиши номера тех геометрических фигур, которые являются цилиндрами. Напиши, какого вида эти цилиндры.
2. Нарисуй какую-нибудь призму, обозначь ее вершины и выпиши названия всех ее граней и ребер.
3. На каждом из рисунков (рис. 45, *а*, *б*) отмечены 8 точек. Дорисуй картинку так, чтобы получилось два разных изображения куба. Обозначь вершины куба и в каждом случае выпиши видимые и невидимые его ребра.

***Самостоятельная работа* 8**
по теме «Конусы»

1. На столе находятся пронумерованные модели геометрических фигур. Выпиши номера тех геометрических фигур, которые являются конусами.
2. Нарисуй какую-нибудь пирамиду, обозначь ее вершины и выпиши названия всех граней и ребер этой пирамиды.
3. На каждом из рисунков (рис. 46, *а*, *б*) отмечены 5 точек. Дорисуй картинку так, чтобы получилось два разных изображения четырехугольной пирамиды. Обозначь вершины пирамиды и в каждом случае выпиши видимые и невидимые ее ребра.

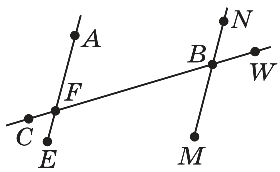


Рис. 47

***Самостоятельная работа* 9**
по теме «Угол»

1. Перечисли все углы, которые ты видишь на рисунке 47.
2. Отметь в тетради точки P, S, Q. Начерти угол PQS.

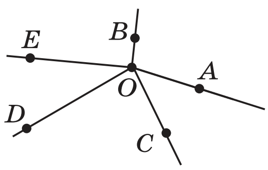


Рис. 48

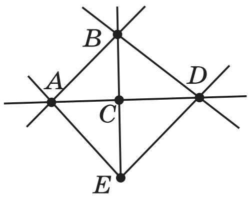


Рис. 49

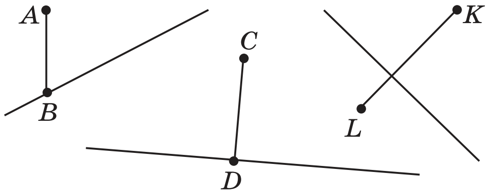


Рис. 50

Самостоятельная работа 10
по теме «Сравнение углов»

1. На рисунке 48 $\angle AOC = \angle EOD$. Сравни (в случае необходимости, используя кальку) углы: $\angle COE$ и $\angle DOA$; $\angle COA$ и $\angle BOA$; $\angle AOB$ и $\angle DOE$; $\angle DOA$ и $\angle BOA$.
2. Построй луч OM. Проведи луч OK так, чтобы угол KOM был прямым, и луч OP так, чтобы угол KOP был острым.
3. Сколько на рисунке 49 тупых, прямых, острых, развернутых углов? Заполни таблицу.

Прямые углы	
Тупые углы	
Острые углы	
Развернутые углы	

Самостоятельная работа 11
по теме «Перпендикуляр»

1. Какой из отрезков, изображенных на рисунке 50, является перпендикуляром к некоторой прямой? Запиши ответ, используя значок $\perp$.
2. Проведи перпендикуляр из точки P к прямой MN (рис. 51).

3*. Нарисуй прямоугольный параллелепипед. Обозначь его $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перпендикуляром к каким прямым является отрезок AA_1? Перпендикуляром к каким плоскостям является отрезок AA_1?

4*. Построй треугольник, в котором все углы острые. Из каждой вершины треугольника проведи перпендикуляр к прямой, содержащей противолежащую этой вершине сторону.

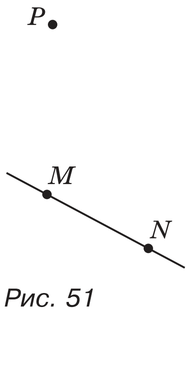


Рис. 51

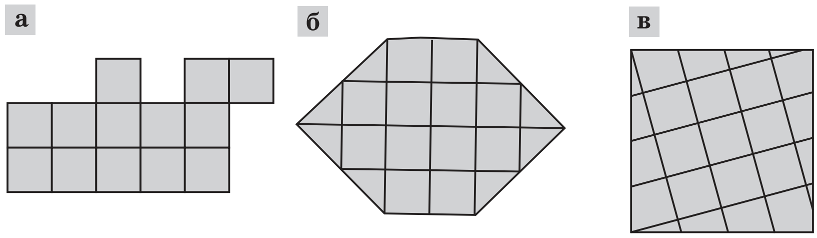


Рис. 52

***Самостоятельная работа* 12**
по теме «Площадь плоской фигуры»

1. Сравни площади фигур (рис. 52), не используя измерений. Результаты сравнений объясни.
2. Чему равна площадь прямоугольника $ABCD$, если $AB = 12$ см, а $BC = 3\frac{1}{4}$ дм?

***Самостоятельная работа* 13**
по теме «Объем тела»

1. Сравни объемы фигур (рис. 53), не используя измерений. Объясни свое решение.

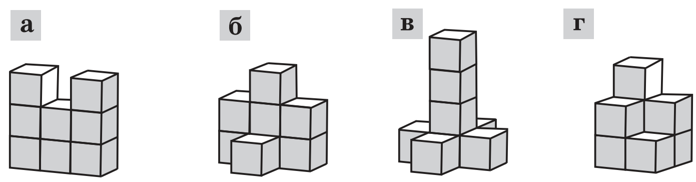


Рис. 53

2. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AB = 12$ см, $BC = 3\frac{1}{4}$ дм и $AA_1 = 25$ мм?

***Самостоятельная работа* 14**
по теме «Измерение углов»

1. Построй развернутый угол MOK и проведи внутри него луч OP так, чтобы один из полученных углов был острым. Измерь получившиеся углы.
2. На прямой AB отметь точку O и проведи лучи OC и OP так, чтобы угол AOC был равен $135°$, а угол POB был равен $150°$. Измерь угол POC.
3. Построй какой-нибудь тупоугольный треугольник, измерь его углы. Чему равна их сумма?

Итоговая контрольная работа

1. Нарисуй какой-нибудь треугольник. Измерь его стороны и углы. Проверь, выполняется ли в этом случае неравенство треугольника. Как можно назвать этот треугольник, используя разные классификации?
2. Построй окружность с центром в точке O и радиусом 4 см. Нарисуй в ней самую большую хорду. Какова ее длина? Как называется эта хорда?
3. Нарисуй замкнутую ломаную $MNPQTM$ и перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой PQ.
4. Из набора имеющихся тел выбери какой-нибудь многогранник, нарисуй его, обозначь его вершины. Как он называется? Есть ли у него другие названия? Перечисли все его ребра, вершины, грани.

4.2. 6 класс

***Самостоятельная работа* 1**
по теме «Повторение»

1. Перечисли названия всех изображенных на рисунке геометрических фигур (рисунок предлагает учитель).
2. Нарисуй какие-нибудь две плоские и две пространственные фигуры. Обозначь их. Напиши названия этих фигур и названия их элементов.
3. Построй остроугольный треугольник и определи его площадь, выполнив необходимые построения и измерения. *Измерь самую короткую хорду этого треугольника, исходящую из его вершины.

***Самостоятельная работа* 2**
по теме «Расстояния»

1. Найди расстояние от вершины острого угла тупоугольного треугольника до прямой, содержащей сторону тупого угла этого треугольника.
2. Охарактеризуй взаимное расположение окружностей с радиусами 2 см и 4 см, расстояние между центрами которых 3 см. Сделай схематический рисунок.

3*. Какую фигуру образуют все точки плоскости, которые удалены от данной окружности на одно и то же расстояние, большее радиуса этой окружности?

***Самостоятельная работа* 3**
по теме «Параллельность»

1. Начерти треугольник MNK. Проведи прямую, параллельную стороне MN, проходящую через точку K.
2. Построй какой-нибудь четырехугольник, в котором есть параллельные стороны.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажи: а) все отрезки, которые параллельны грани основания куба; б) все прямые, которые скрещиваются с прямой AB.

Самостоятельная работа 4
по теме «Координаты на плоскости»

1. На координатной плоскости построй незамкнутую ломаную, координаты вершин которой (–2; 4), (3; 7), (5; 0), (1; –1), (0; –4), (–7; –2). Можно ли построить еще какие-нибудь ломаные с этими же вершинами? Если можно, построй две такие линии разными цветными карандашами. Какая из всех этих линий имеет наименьшую длину? Измерь длину самой короткой из этих ломаных, приняв за единичный отрезок длиной 5 мм.

2*. Нарисуй на координатной плоскости фигуру, все точки которой имеют координаты, удовлетворяющие условиям: $3 < x < 5$, $-2 < y < 1$.

Самостоятельная работа 5
по теме «Движения»

1. Выбери из данных фигур те, которые являются образом выделенной фигуры при некотором параллельном переносе (повороте, осевой симметрии).
2. На рисунке выбери ту прямую, которая является осью симметрии данных фигур (рисунок предлагает учитель). Обоснуй свой выбор.
3. Начерти пятиугольник и построй его образ при параллельном переносе (вектор задай самостоятельно).

4*. Начерти незамкнутую четырехзвенную ломаную и построй ее образ при повороте плоскости вокруг точки на угол 75° (центр поворота задай самостоятельно).

5*. Изобрази куб. Нарисуй образ этого куба при симметрии относительно прямой, содержащей какое-нибудь его ребро.

Самостоятельная работа 6
по теме «Фигуры, обладающие симметрией»

1. Построй правильный шестиугольник с помощью симметрии относительно прямой, содержащей сторону правильного треугольника.
2. Начерти орнамент, состоящий из дуг окружности, построй его образ при центральной симметрии относительно точки, не принадлежащей этому орнаменту.
3. Выдели все элементы симметрии фигуры, предложенной учителем.

4*. Верно ли, что диагональ прямоугольника может являться его осью симметрии? (Ответ обоснуй.)

5*. Придумай и нарисуй такую кривую, которая совместится сама с собой при центральной симметрии относительно одной из своих точек (центр симметрии выдели).

Контрольная работа за первое полугодие

1. Начерти окружность радиусом 3 см, проведи какой-нибудь диаметр этой окружности и отметь на ней точку A. Построй прямую, параллельную диаметру и проходящую через эту точку. Верно ли, что при таком построении всегда получится хорда окружности? Ответ обоснуй.
2. Начерти какой-нибудь неостроугольный равнобедренный треугольник, боковая сторона которого 5 см. Сколько решений имеет задача? Построй высоты своего треугольника, проведи необходимые измерения и определи площадь треугольника. *Какой из всех таких треугольников имеет наименьшую площадь?

Итоговая контрольная работа

1. Нарисуй два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ так, чтобы расстояние между вершинами A и M было бы равно 1 см и при этом пересечением квадратов было: а) пустое множество, б) отрезок, в) точка, г) треугольник.
2. а) Начерти какой-нибудь треугольник, длина основания которого равна 10 см, а длина высоты 5 см. б) Построй образ этого треугольника при повороте вокруг середины основания на угол, равный 180°. Какой фигурой является объединение данного треугольника и его образа? Найди площадь этой фигуры.
3. Начерти правильный треугольник, через каждую вершину этого треугольника проведи прямую, параллельную противоположной стороне, отметь точки пересечения этих прямых A, B, C. *Какую фигуру образуют отрезки AB, BC, CA? Верно ли, что получившаяся фигура обладает осевой, поворотной, центральной симметрией? (Ответ обоснуй.) **Построй какую-нибудь фигуру (не многоугольник), имеющую центр симметрии и три оси симметрии.

§ 5 Наглядность в преподавании геометрии

5.1. Как сделать геометрическую иллюстрацию наглядной

В современной методике преподавания школьной геометрии основополагающим стал принцип наглядности. При этом книг с действительно наглядным (визуальным) сопровождением почти нет. Это противоречие можно избежать, взяв за основной критерий наглядности изображения его реалистичность.

Для начала оценим иллюстративный материал наиболее известных изданий по геометрии. Оказывается, что подавляющее большинство иллюстраций учебников по геометрии выполнены с использованием частного вида аксонометрического проектирования — фронтальной косоугольной диметрии (рис. 54, 55)[1]. Напомним, что аксонометрия возникла и существует сейчас как вид инженерной графики. Достоинство аксонометрического проектирования состоит в том, что чертежи позволяют определять некоторые линейные и угловые размеры изображенных на них объектов. Однако совершенно непонятно, почему именно этот способ изображения пространственных фигур избран

---

[1] Рис. 54, *а* — А. Д. Александров и др. Геометрия 10—11. — М.: Просвещение, 1994.
Рис. 54, *б* — Л. С. Атанасян и др. Геометрия 10—11. — М.: Просвещение, 1991.
Рис. 54, *в* — Е. Д. Кулагин и др. Геометрия 10—11. — М.: Рольф, Айрис-пресс, 1997.
Рис. 55, *а* — И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. Наглядная геометрия. — М.: МИРОС, 1995.
Рис. 55, *б* — Н. С. Подходова. Геометрия 5 класс. — СПб.: Дидактика, 1995.
Рис. 55, *в* — А. П. Киселев. Геометрия 9. — М.: Просвещение, 1972.
Рис. 55, *г* — А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. Геометрия. — М.: Наука, 1990.

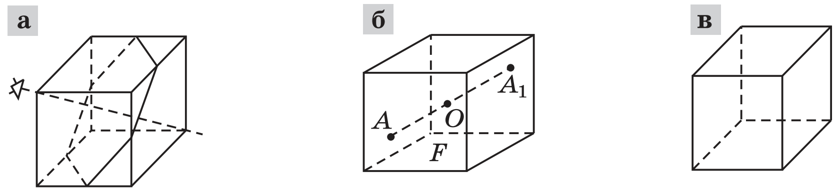


Рис. 54

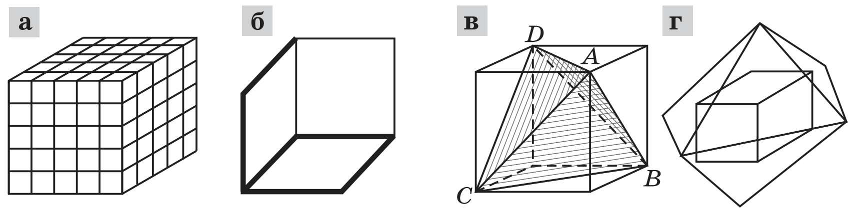


Рис. 55

художниками (и учителями) для иллюстрации геометрического материала. Ведь такие чертежи, особенно при косоугольном проектировании, обладают низким уровнем наглядности, т. е. не соответствуют визуальному опыту человека.

Несмотря на это, *наиболее распространенный* способ изображения геометрических объектов в печатных изданиях — *это* косоугольная фронтальная проекция — *наименее наглядный* вид проектирования.

Остановимся подробнее на недостатках косоугольной фронтальной диметрической проекции как способа создания иллюстраций для школьного курса геометрии.

Прежде всего заметим, что косоугольное проектирование не участвует в оптическом процессе ви́дения. Более того, те оптические процессы, которые происходят при создании образов окружающих предметов на сетчатке глаза, не могут быть сведены ни при каких допущениях и обобщениях к косоугольному проектированию. Таким образом, косоугольное проектирование является совершенно противоестественным для глаза и мозга человека способом плоского представления объемных объектов.

Приведем примеры «неудобства» фронтальной косоугольной диметрии.

Многие авторы и учителя используют в упражнениях по обогащению геометрических представлений тот факт, что куб с некоторой точки зрения может быть увиден квадратом. При этом наверняка обсуждается, *как* этот куб должен быть расположен по отношению к наблюдателю и почему мы видим только одну его грань. Однако постоянное применение этого факта при создании определенных представлений куба не мешает также регулярно использовать изображение куба, полученное методом косоугольной фронтальной диметрии, на котором две грани изображены квадратами, но при этом остальные изображаются не отрезками, а параллелограммами. По нашему мнению, это по меньшей мере непоследовательно, если не вредно, и для создания цельного образа геометрии, и с точки зрения доверия к учителю, если ученики сознают это противоречие.

Другой важный пример. Очень часто возникают ситуации, когда некоторые элементы чертежа располагаются так, что затрудняется его восприятие, и потому необходимо изменить ракурс. Однако при фронтальной косоугольной диметрии очень ограничен выбор допустимых по степени наглядности ракурсов. В частности, из-за этого с помощью косоугольной фронтальной диметрии невозможно наглядно изобразить динамику (вращение объекта, постепенное изменение точки зрения и т. д.). Скорее всего, с этим связано отсутствие подобных задач в пособиях по геометрии. Но ведь именно использование упражнений с динамическими изменениями объектов наиболее эффективно в деле обогащения геометрических представлений учащихся, развития вариативности их мышления.

С примером косоугольного проектирования мы можем встретиться, наблюдая за тенями предметов, образованными пучком параллельных между собой световых лучей. И здесь стоит заметить, что изучение свойств объектов по их тени является отдельной, гораздо более трудной задачей, чем изучение самих объектов. Но получается, что именно эту задачу мы решаем в школе с детьми, предъявляя в качестве визуального геометрического материала чертежи и рисунки, созданные методом косоугольного проектирования.

Справедливости ради отметим, что в геометрической литературе есть издания, в которых художники стремились преодолеть традиции фронтального косоугольного проектирования (рис. 56)[1]. Однако, к сожалению, они работали над книгами, которые не являются базовыми для школьного геометрического образования.

---

[1] Рис. 56, *а* — Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
Рис. 56, *б* — Н. Ф. Четверухин. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. — М.: Учпедгиз, 1955.
Рис. 56, *в* — В. В. Рассохин, Н. А. Целинский. Занимательные задачи по проекционному черчению. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
Рис. 56, *г* — М. Берже. Геометрия. — М.: Мир, 1984.

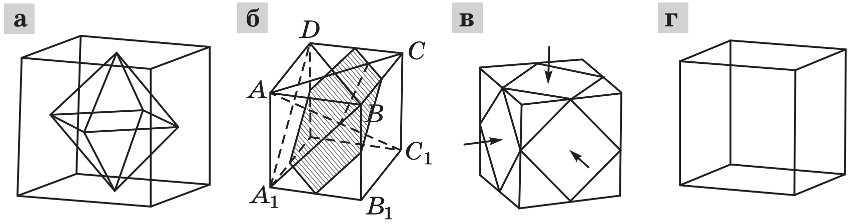


Рис. 56

Итак, мы определили, что в подавляющем большинстве учебников геометрии иллюстративный материал не обладает достаточным уровнем наглядности. В то же время среди современных учителей и методистов вряд ли найдется хотя бы один, который считал бы, что в школьной геометрии не должна быть усилена роль наглядного материала. Таким образом, мы обнаруживаем *глобальное противоречие* между теоретическими методическими убеждениями и практической их реализацией.

Может возникнуть законное замечание, что за содержание, а главное за качество иллюстраций в учебнике, учитель и автор ответственности не несут. На это ответим, что, с одной стороны, почти все учителя сами так изображают геометрические фигуры и, более того, учат детей такому изображению. С другой — автор учебника может и должен влиять на издателей по поводу качества изображений. Но, видимо, авторы не имеют информации о возможных способах изображения (или не придают этому должного значения) и полностью доверяют издательству. В издательстве же, к сожалению, иллюстрированием учебника по геометрии и книги по машиностроению будет заниматься один художник, руководствуясь одними и теми же *чертежными* принципами.

Как можно избежать выявленных нами противоречий и устранить качественные недостатки современной геометрической иллюстрации?

Необходимо изменить принципы работы над учебной геометрической иллюстрацией. Нужно рисовать, а не чертить. Иллюстратор, начиная работать над учебником, должен осознать, что ему, во-первых, надо изображать объекты так, как их может увидеть человек, и, во-вторых, не надо их изображать так, как человек их увидеть не может. Главным *критерием уровня наглядности* должна стать естественность и *реалистичность изображения*.

В иллюстрации нужно предъявлять объекты, а не их изображение-тень. Ни один профессиональный художник на вашу просьбу изобразить куб не нарисует такую картинку, как на рисунках 54 и 55. Художники стремятся создать рисунки на плоскости, которые вызывают максимально приближенное к реальному ощущение от изображенного пространства.

Для создания ощущения пространства художники используют перспективу, построение которой можно описать с помощью центрального проектирования. В геометрической иллюстрации мы редко изображаем широкие сцены с большим количеством объектов, расположение которых должно быть согласовано (это достигается обычно через перспективу), а в основном предъявляем отдельные геометрические объекты. Центральное проектирование достаточно малых объектов может быть представлено параллельным проектированием в направлении главного луча зрения без ущерба для наглядности изображения, так как угол между проектирующими прямыми мал и, выходя за границы различения наблюдателем, допускает пренебрежения.

Параллельное проектирование вдоль главного луча зрения довольно точно воспроизводит воспринимаемый человеком через зрение образ отдельного объекта. Поэтому не обязательно применять перспективные изображения для геометрической иллюстрации (создание таких рисунков очень трудоемкий процесс), а достаточно выбрать среди возможных способов параллельного проектирования прямоугольное проектирование на картинную плоскость.

У прямоугольного проектирования есть свойство, которое в некотором смысле гарантирует наглядность изображения. При прямоугольном проектировании изображение отрезка не может стать длиннее оригинала, а равно ему только тогда, когда оригинал расположен параллельно картинной плоскости. Зная это, художник может всегда проверить, правильно ли он изобразил объект, характеристики которого описываются в тексте или просто ему известны. Так, про куб можно сказать, что его грани должны изображаться параллелограммами, длины сторон которых зависят от угла наклона соответствующих ребер куба к плоскости проекции (картинной плоскости), но всегда меньше, чем длина отрезка, изображающего ребро куба во фронтальном положении.

Рисунки, которые приводятся на с. 61, сделаны путем прорисовки фотографий, полученных с помощью объектива с большим фокусным расстоянием, что позволило получить изображение куба с ребром длиной 3 см приблизительно как результат параллельного проектирования. Эта последовательность фотографий (рис. 57) дает возможность проследить за тем, как мы можем увидеть куб при поворачивании его вокруг прямой, проходящей через центры верхней и нижней граней. Эти шестнадцать ракурсов куба могут служить отправной точкой для создания

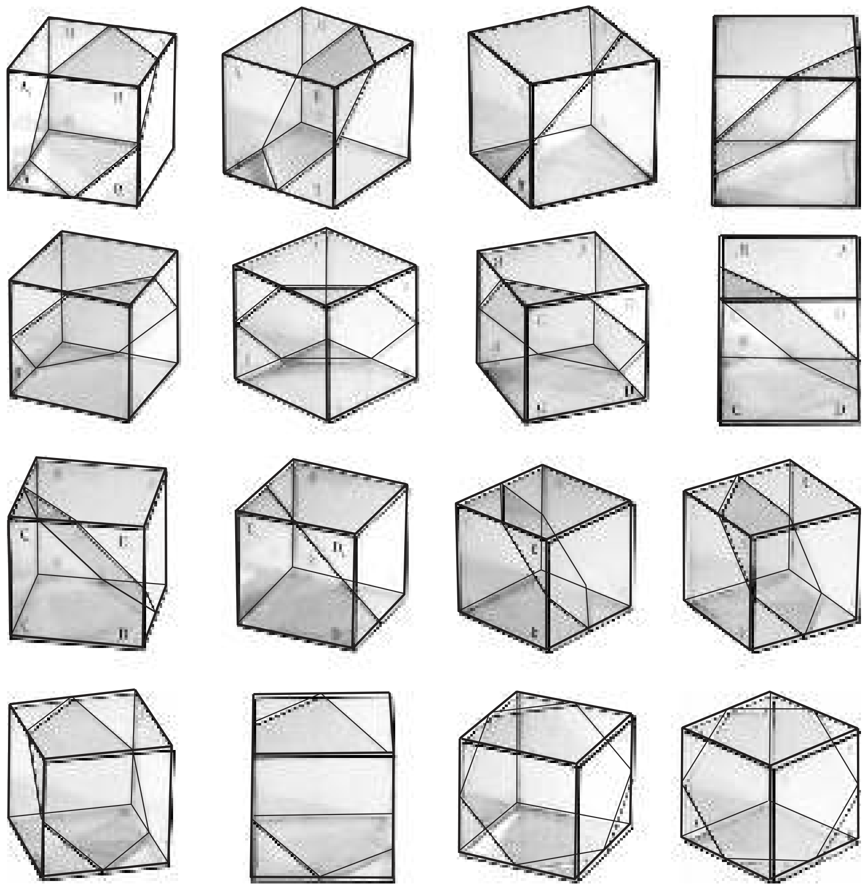


Рис. 57

визуального геометрического материала как для художников, так и для учителей, которые готовы решать задачу обеспечения максимальной наглядности геометрии.

Конечно, у учителя часто не бывает возможности использования правильных изображений в учебном процессе не только из-за нехватки времени, но и из-за неумения их создать. В этой ситуации мы можем посоветовать, во-первых, заранее заготовить шаблоны основных геометрических фигур (причем лучше, чтобы они были согласованы между собой) как для рисования на доске, так и для рисования в тетрадях. Во-вторых, учителю математики необходимо освоить компьютерные графические программы, которые позволяют довольно быстро планировать и рисовать качественные геометрические иллюстрации.

5.2. Изготовление наглядных пособий

Изготовление конструктора

Основой геометрического конструктора удобно сделать штатив. Такие штативы есть, например, в кабинете физики каждой школы. Мы будем на нем закреплять плоскости и с их помощью конструировать различные пространственные фигуры.

Для изготовления ***модели плоскости*** поступаем следующим образом.

1. Лобзиком на торцах двух реек $300 \times 10 \times 10$ мм и двух реек $270 \times \times 10 \times 10$ мм выпиливаем выступы и пазы соответственно (рис. 58, *а*). Затем на каждой из реек на расстоянии 1 см друг от друга делаем ножом круговые насечки по всей длине рейки.

2. Склеиваем из приготовленных четырех реек рамочку 300×270 мм (рис. 58, *б*).

3. На эту рамочку натягиваем леску так, чтобы образовалась сетка (рис. 59); леску сначала натягиваем на короткие рейки, затем на длинные.

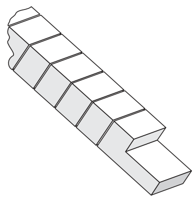
Модель плоскости готова.

В качестве ***моделей отрезков*** удобно взять тонкую резинку с крючками на концах (рис. 60). Можно изготовить крючки из тонкой жесткой проволоки или использовать бельевые крючки.

Для геометрического конструктора нам понадобятся две модели плоскости и несколько (чем больше, тем лучше) моделей отрезков. Одну плоскость закрепляем на штативе, а другую помещаем около его основания (рис. 61). «Отрезки» прикрепляются одним концом к сетке верхней плоскости конструктора, а другим — к сетке нижней (рис. 62).

Для конструирования ***модели конуса*** (в том числе пирамиды) положим под нижнюю плоскость конструктора плоскую фигуру, которая бу-

а



б

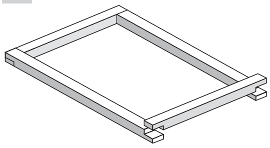


Рис. 58

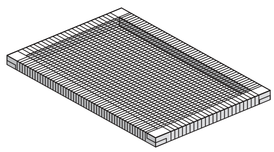


Рис. 59

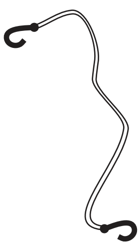


Рис. 60

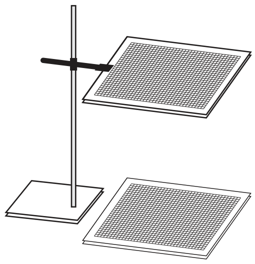


Рис. 61

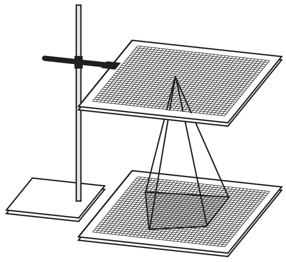


Рис. 62

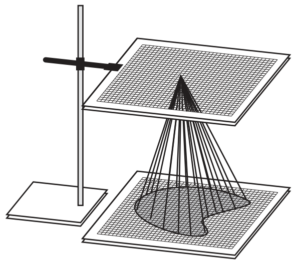


Рис. 63

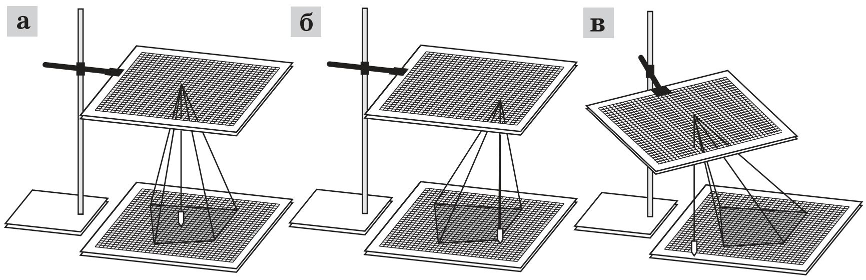


Рис. 64

дет основанием конуса, и соединим «отрезками» точку верхней плоскости и точки границы основания (рис. 63). На такой модели пирамиды удобно:

— показать различные виды пирамид (как выпуклых, так и невыпуклых);

— с помощью отвеса показать, что высота пирамиды может лежать внутри пирамиды, на грани, совпадать с ребром, лежать вне пирамиды (это легко достигается поворотом верхней плоскости относительно стойки штатива; рис. 64, *а—в*).

Для построения ***модели призмы*** помещаем на верхней и нижней плоскостях два равных многоугольника так, чтобы их стороны оказались попарно параллельными, и соединяем «отрезками» соответствующие вершины. Передвигая в различных направлениях параллельно самой себе нижнюю плоскость, получаем прямую и различные наклонные призмы (рис. 65).

Конструктор может быть использован не только для иллюстрации вводимых понятий, но и для решения задач исследовательского характера. Например, при исследовании свойств параллелепипеда экспериментальным путем можно установить свойство его диагоналей: во всяком параллелепипеде все диагонали проходят через одну точку

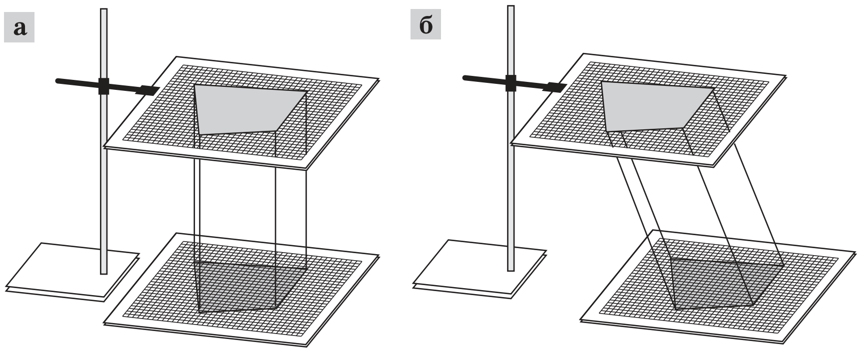


Рис. 65

и делятся ею пополам, а в прямоугольном параллелепипеде, кроме того, все диагонали равны между собой. Обсуждая этот вопрос в 5 классе, очень важно подчеркнуть, что эти наблюдения следует еще доказать, чем мы и займемся в 8 или 10 классе в зависимости от того, по какому учебнику будем заниматься.

Изготовление моделей плоских фигур

1. *Отрезки*. Удобно в качестве модели отрезка иметь полый бумажный цилиндр. Для изготовления такой модели нам потребуется:

1) лист бумаги прямоугольной формы (бумага может быть разной, удобно использовать «бумагу для записей»);
2) трубочка для коктейлей (использованный стержень для шариковой ручки или палочка от карамели);
3) любой канцелярский клей (лучше клей-карандаш).

Этапы изготовления

1. Накручиваем лист бумаги на трубочку *очень плотно* и *равномерно* по всей ширине листа (рис. 66). Не докручивая до конца листа, оставляем полоску шириной 2—3 см.

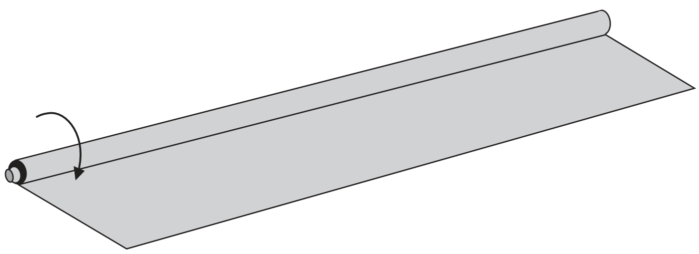


Рис. 66

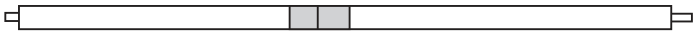


Рис. 67

2. Придерживая рукой закрученную часть листа, наносим клей на оставленную полоску и закручиваем лист бумаги до конца.
3. Вынимаем трубочку из получившегося плотного бумажного цилиндра. Модель отрезка готова.

Замечание. В зависимости от того, какой длины нужен отрезок, можно использовать лист бумаги большей ширины (той же плотности) или несколько листов, которые последовательно накручиваются на трубочку, при этом место стыка полученных бумажных цилиндров скрепляется скотчем (рис. 67).

2. *Лучи*. Луч определяется как фигура, которая получается из отрезка неограниченным продолжением за один из его концов. Для формирования соответствующего образа можно сделать модель луча типа ручки-указки с выдвижными звеньями.

Для изготовления этой модели луча потребуются те же материалы и инструменты, что и для изготовления модели отрезка.

Этапы изготовления

1. Сделаем бумажный цилиндр: на стержень от шариковой ручки (1) длиной 15 см плотно накручиваем лист бумаги квадратной формы (2) со стороной 13 см. Чтобы полученный бумажный цилиндр (трубочка) не двигался по стержню и не мог с него соскочить, фиксируем его положение скотчем (3). Затем на расстоянии 2,5 см от шарика стержня делаем карандашом круговую отметку на трубочке (4) (рис. 68, *а*). Первое звено модели луча готово.
2. Изготавливаем еще один бумажный цилиндр, накручивая квадратный лист бумаги не на стержень, а на приготовленную в п. 1 бумажную трубочку. Мы получили конструкцию из двух бумажных цилиндров (трубочек), одна из которых может перемещаться внутри другой. На один из концов второй трубочки наклеиваем полоску скотча, а на расстоянии 2,5 см от другого ее конца делаем круговую отметку карандашом (рис. 68, *б*). Второе звено модели луча готово.
3. Аналогично (см. п. 2) изготавливаем третье, четвертое, пятое и другие звенья модели. При этом с целью получения прочной конструкции при изготовлении этих звеньев желательно использовать не квадратный, а прямоугольный лист бумаги, например для

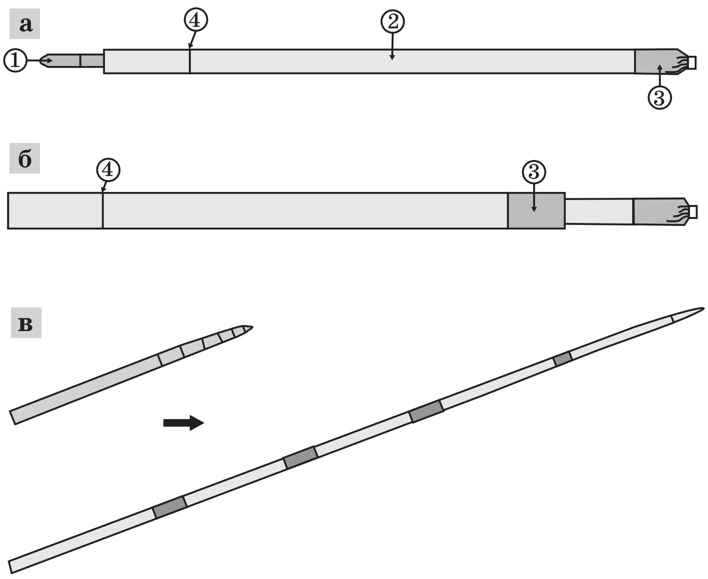


Рис. 68

3-го звена — прямоугольник 13×15 см, для 4-го звена — прямоугольник 13×17 см и т. д. Модель луча готова (рис. 68, *в*).

В полученной модели каждое ее предыдущее звено свободно перемещается внутри следующего звена. При этом полоски скотча на трубочках (звеньях) не дают всякому предыдущему звену конструкции целиком войти в следующее ее звено, а отметка, сделанная на звене, показывает границу возможности его выдвижения.

3. ***Углы.*** Для демонстрации угла как части плоскости можно использовать модели углов, вырезанные из цветного картона, а можно сконструировать следующую модель (рис. 69, *а*).

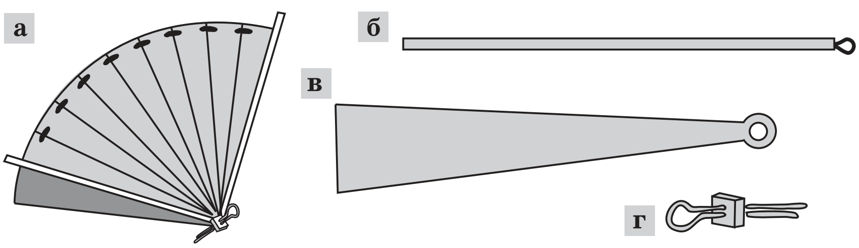


Рис. 69

Этапы изготовления

1. Сделаем два «отрезка»; на одном из концов у каждого из них крепление в виде петельки (рис. 69, *б*).
2. Из плотного картона вырезаем 12—15 деталей, изображенных на рисунке 69, *в* (одна деталь — из картона черного цвета, остальные — из однотонного картона другой расцветки).
3. Из жесткой тонкой проволоки делаем крепление для этих деталей (рис. 69, *г*); фиксируем положение петли с помощью кусочка ластика.
4. Нанизываем на это крепление детали из картона: первой надеваем деталь черного цвета (цветной стороной к резинке), затем однотонные детали. Закрепляем эти детали, надевая на спицу крепления еще один кусочек резинки — фиксатор положения.
5. С помощью нитки и иголки прошиваем картонные детали так, чтобы получился веер (рис. 69, *а*). (В полуоткрытом виде веер выглядит так, как на рисунке 69, *а*, в сложенном — как на рисунке 69, *в*.)
6. «Отрезки» вставляем в петлю веера и пришиваем к первой и последней его детали.

4. *Круг*. Модель иллюстрирует процесс получения круга с помощью вращения отрезка вокруг одного из его концов (рис. 70).

Для изготовления модели нам потребуется:

1) квадратный кусок черного (или темного) дерматина (размером 350 × 350 мм);
2) лист плотного картона (350 × 350 мм) и лист цветного картона (300 × 350 мм);
3) трубочка для коктейля, скотч, канцелярский клей;
4) циркуль, степлер, иголка с черной ниткой (№ 10), ножницы.

Этапы изготовления

1. Отмечаем центр квадратного куска дерматина; проводим на нем мелом из центра этого квадрата отрезок

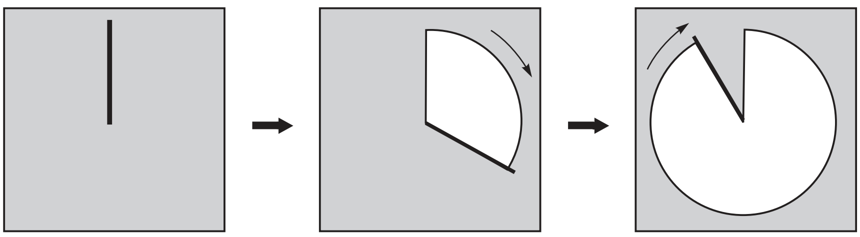


Рис. 70

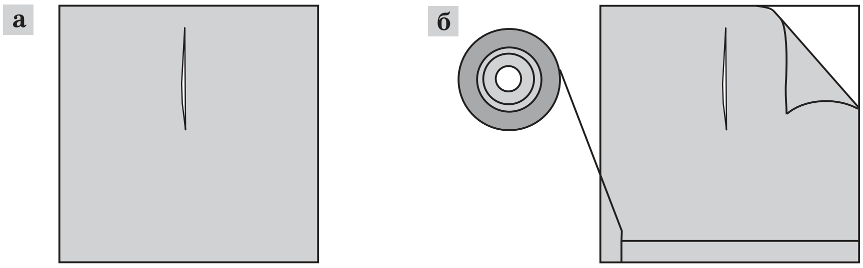


Рис. 71

длиной 14,3 см. Затем делаем прорезь дерматина по проведенному отрезку (рис. 71, *а*).

2. На листе картона (350 × 350 мм) чертим рамочку, намазываем ее клеем и приклеиваем дерматин к картону. Края получившейся конструкции (стороны квадрата) оклеиваем скотчем (рис. 71, *б*).
3. Из цветного картона вырезаем круг радиусом 14 см, а также шестую часть круга того же радиуса — сектор с «ушком» (рис. 72, *а*).
4. Разрезаем круг по какому-нибудь его радиусу. Приклеиваем к кругу (с изнаночной стороны картона) сектор так, чтобы отрезок-радиус, ограничивающий сектор с той его стороны, где расположено «ушко», совпал с линией разреза круга (рис. 72, *б*).
5. Трубочку для коктейля длиной 14 см степлером прикрепляем к кругу (с лицевой стороны картона) вдоль линии разреза (рис. 73, *а*). Это модель отрезка, который будем вращать вокруг одного из его концов.
6. Вставляем круг (лицевой стороной картона вверх) в щель между дерматином и картоном через разрез в дерматине (рис. 73, *б*). «Ушко» не даст кругу выскочить из разреза при полном обороте отрезка.

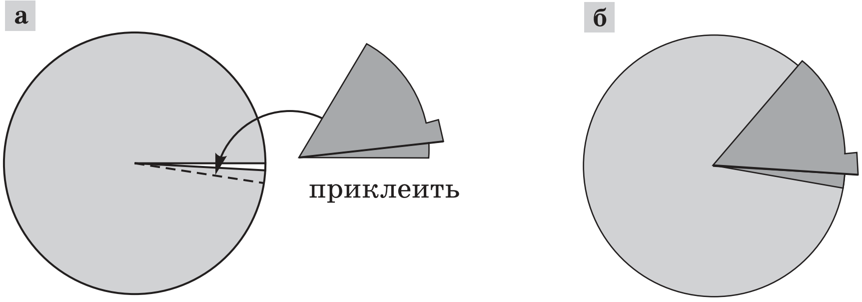


Рис. 72

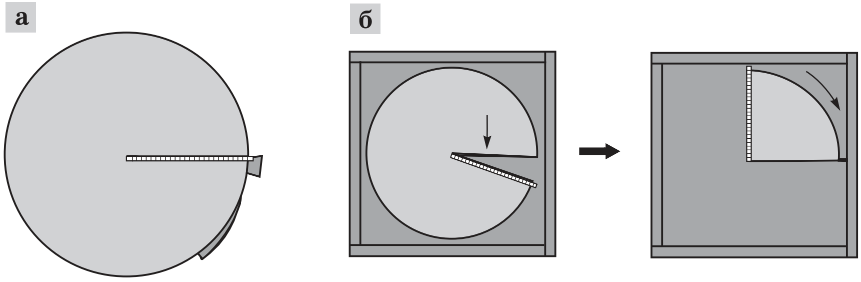


Рис. 73

7. Вдеваем в иголку нитку длиной 20—25 см. Закрепляем нитку в центре получившейся модели (в центре квадрата) и затем продеваем ее сквозь «отрезок» (трубочку для коктейля). Закрепляем нитку на конце этого «отрезка».

Выполнив эти действия, мы совместили центр круга и центр листа картона. Модель, иллюстрирующая процесс построения круга из отрезков, готова.

Замечание. В ходе работы с моделью можно на дерматине провести мелом окружность, которую описывает свободный конец отрезка при своем вращении. Эта окружность легко стирается с дерматина мокрой тряпочкой.

5. ***Набор плоских фигур.*** Набор содержит две произвольные равные фигуры, три равных круга, правильный треугольник, квадрат, два прямоугольника, пятиугольник, шестиугольник и несколько произвольных многоугольников, в том числе и невыпуклых. Модели этих фигур изготавливаются из плотного картона.

6. ***Набор резинок.*** Набор содержит цветные шляпные резинки разных длин и цветов, на концах которых прикреплены крючки. Полезно иметь также круглые резинки (которые продаются в канцелярских магазинах). Из таких резинок конструируются всевозможные ломаные, многоугольники.

Изготовление моделей пространственных фигур

1. ***Прямой круговой цилиндр.*** Для изготовления модели цилиндра нам потребуется:

1) плотная прозрачная полиэтиленовая папка;
2) несколько листов картона;
3) скотч, карандаш, шариковая ручка;
4) циркуль, линейка, иголка и нитки.

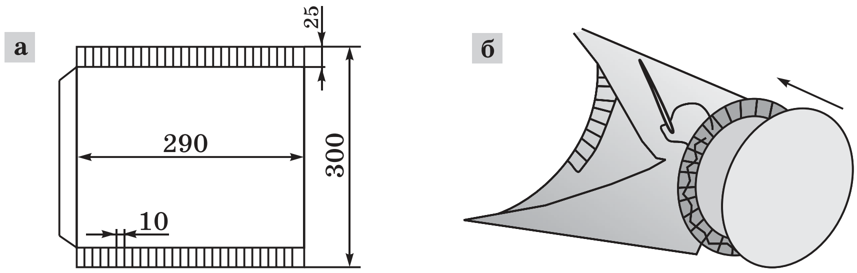


Рис. 74

Этапы изготовления

1. Вырезаем из картона четыре круга диаметром 9 см.
2. Отрезаем от папки шов и разворачиваем ее наружной стороной вверх. Утюгом через газету разглаживаем сгиб папки (утюг ставим на «шерсть» или «шелк», 10—15 с).
3. На получившемся прямоугольном листе шариковой ручкой чертим развертку боковой поверхности цилиндра (рис. 74, *а*). Вырезаем развертку. Используя разметку, с двух сторон прямоугольника по всей длине делаем надрезы через каждый сантиметр (шириной 25 мм).
4. Развертка боковой поверхности цилиндра готова.
5. Клапаны одной из ее сторон пришиваем к вырезанному ранее из картона кругу — основанию цилиндра (рис. 74, *б*). Другое основание цилиндра пришиваем к его боковой поверхности с другой стороны.
6. Чтобы скрыть многочисленные стежки на основаниях цилиндра, на каждое из них приклеиваем по оставшемуся кругу. Стык боковой поверхности и оснований цилиндра оклеиваем скотчем.

Модель прямого кругового цилиндра готова.

2. ***Прямой круговой конус.*** Для изготовления модели конуса используются те же материалы и инструменты, что и при изготовлении модели цилиндра.

Этапы изготовления

1. Вырезаем из картона два круга радиусом 7 см.
2. На прозрачном прямоугольном листе (разглаженной папке для бумаг) чертим развертку боковой поверхности конуса — сектор радиуса 25 см с центральным углом 100° (рис. 75, *а*).
3. Дальнейшие действия такие же, как при изготовлении модели цилиндра (рис. 75, *б*).

В результате получаем модель прямого кругового конуса с образующей 25 см и радиусом основания 7 см.

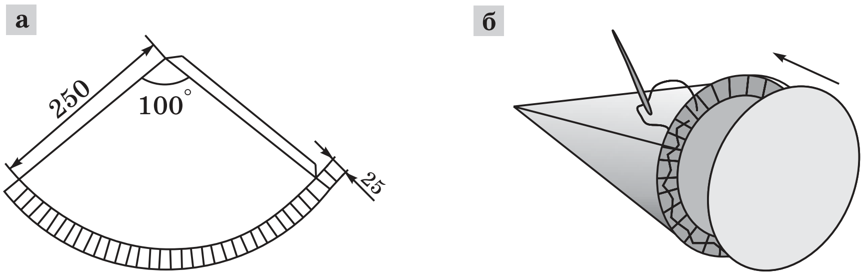


Рис. 75

3. ***Модели многогранников.*** Полезно иметь как каркасные, так и сплошные модели многогранников.

Каркасные модели многогранников можно изготовить несколькими способами:

— с помощью описанного ранее конструктора (о дидактических возможностях таких моделей мы уже говорили);

— из толстой проволоки, спаивая ее части нужным образом (рис. 76);

— из моделей отрезков из полых цилиндров, протягивая сквозь них проволоку (рис. 77).

В последнем случае проволока может быть как цельной, так и не цельной. Если проволока цельная, то некоторые «отрезки» будут надеты на проволоку дважды.

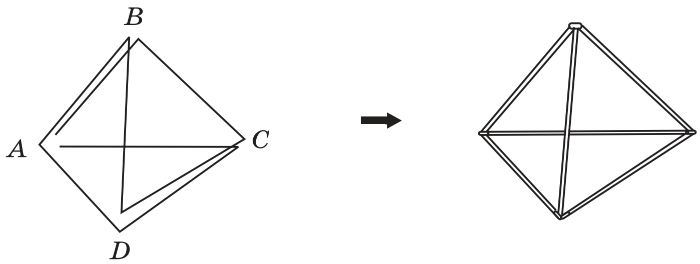


Рис. 76

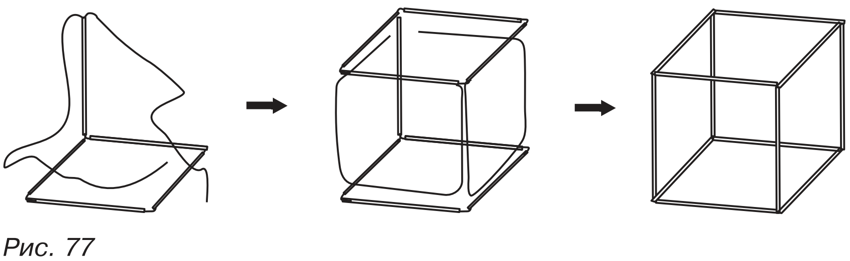


Рис. 77

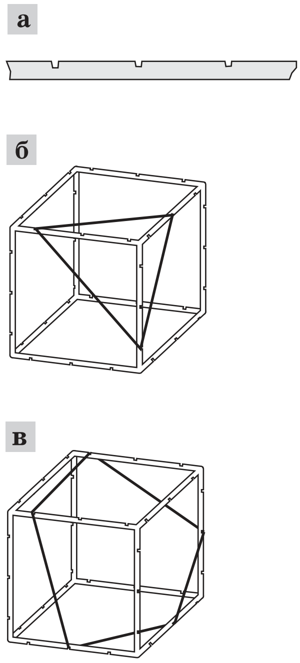


Рис. 78

При использовании цельной проволоки каркасная модель получается более жесткой. Места стыков ребер превращаем в вершины многогранника, залепив проволоку кусочками белого пластилина.

Каркасные модели удобно использовать при изучении темы «Ломаная», «Многоугольники», «Элементы многогранника», «Сечения многогранника». Например, если модель сделана из толстой проволоки, то, нанеся на ее ребра насечки (рис. 78, *а*), мы сможем с помощью круглых резинок получать различные ломаные с вершинами в точках, соответствующих этим насечкам (рис. 78, *б*). Получается вполне мобильная модель. Снимая резинку с одной насечки или надевая на новую насечку, легко изменить вид ломаной (рис. 78, *в*). А при наличии картонной «плоскости» нетрудно проверить, является ли построенная ломаная плоской.

Сплошные модели хорошо иметь двух видов: прозрачные и непрозрачные. Прозрачные модели полезны при обучении детей изображению многогранников, в частности при обсуждении того, какие ребра многогранника являются в данном ракурсе видимыми и какие — невидимыми. Кроме того, на прозрачной поверхности многогранника можно фломастером нарисовать различные линии, которые впоследствии могут быть стерты.

При изготовлении прозрачных моделей различных многогранников можно использовать термоклеящуюся пленку, так как она легко приклеивается утюгом к любой поверхности и при наклеивании, в том числе и на каркасную модель многогранника, не морщится, хорошо натягивается.

Для изготовления прозрачной модели многогранника делаем сначала его каркасную модель (лучше из толстой проволоки), затем из термоклеящейся пленки вырезаем развертку этого многогранника и оклеиваем каркасную модель этой пленкой.

На рисунке 79 показано изготовление прозрачной модели куба: развертку (рис. 79, *а*) прикладываем (клеящейся стороной пленки вниз) к каркасной модели куба так, чтобы какой-нибудь отмеченный на ней квадрат совпал

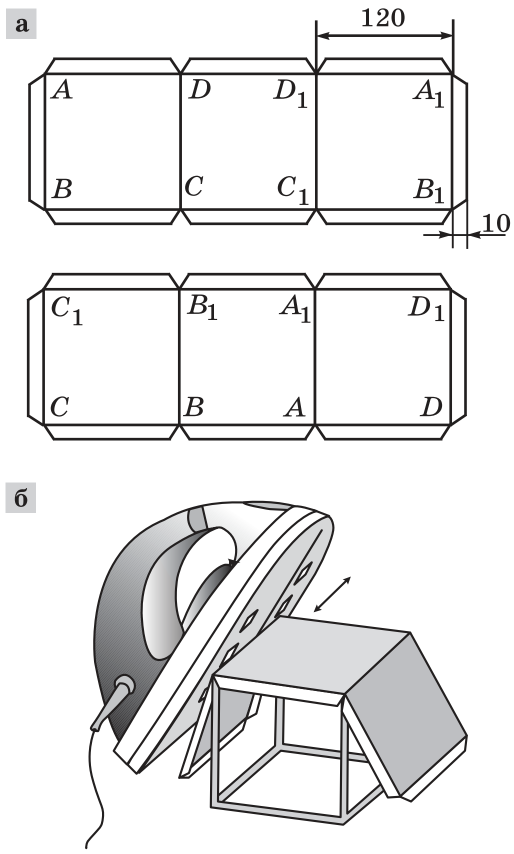


Рис. 79

с ребрами верхней грани куба (рис. 79, *б*). Проводим утюгом (утюг ставим на «шерсть» или «шелк») по одному из этих ребер; натягиваем пленку и проводим утюгом по ребру, параллельному первому, а затем по двум оставшимся ребрам этой грани. Остальные грани куба оклеиваются аналогичным образом.

На рисунке 80 показано изготовление прозрачной модели пирамиды: для наклеивания развертки на каркасную модель пирамиды сначала оклеиваем боковые грани, а затем основание.

Непрозрачные модели призм и пирамид удобно не склеивать из разверток, а собирать. Покажем это на примере куба.

1. На толстом картоне чертим развертку боковой поверхности куба, завершая ее двумя прямоугольными клапанами, и два квадрата — будущие основания —

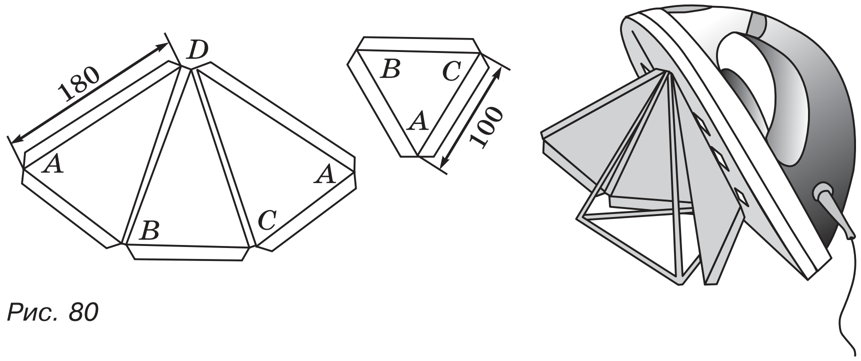


Рис. 80

с прямоугольными клапанами при каждой их стороне (рис. 81, *а*).

2. По линейке чем-нибудь острым (например, иголкой циркуля) надрезаем картон там, где должны быть сгибы картона (рис. 81, *б*).
3. По линейке сгибаем развертку боковой поверхности по ребрам, соединяем клапаны боковой поверхности и «надеваем» на них основания (рис. 81, *в*).

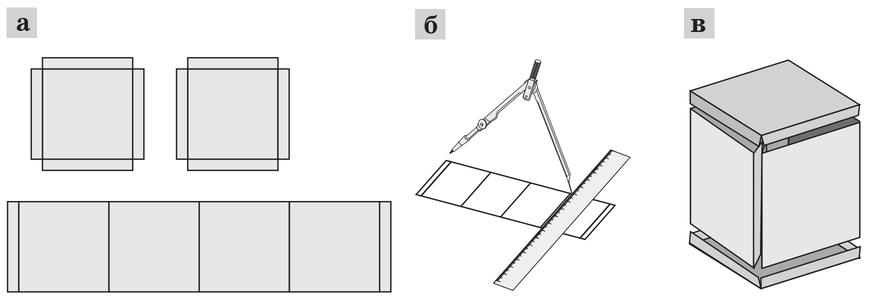


Рис. 81

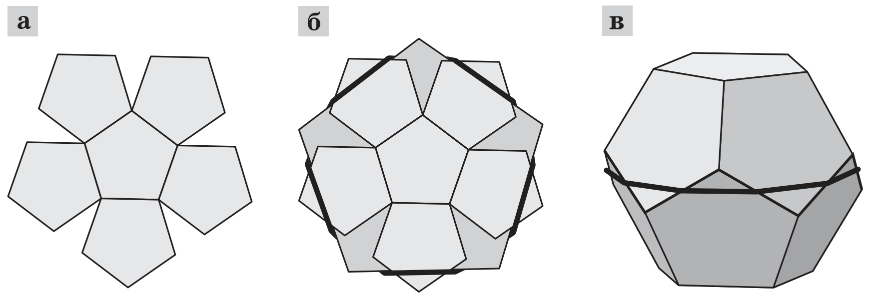


Рис. 82

Изготовленные таким образом модели можно хранить в специальных конвертах (например, приклеенных к последней странице тетради ученика) и много раз использовать по мере необходимости.

Приведем еще один пример складной модели многогранника — правильного додекаэдра.

1. Построим две половины развертки додекаэдра (рис. 82, *а*).
2. Наложим их друг на друга так, как показано на рисунке 82, *б* (повернув вторую деталь относительно первой на 36°).
3. Соединим круглой резинкой части развертки так, как показано на рисунке 82, *в*, и получим модель додекаэдра.

§ 6 Геометрические экскурсии

В качестве примеров геометрических экскурсий мы предлагаем учителю экскурсии по Петербургу и его окрестностям. Это, однако, не означает, что экскурсии можно проводить только в Петербурге. В любом городе, в любом поселке можно проводить такие экскурсии, так как все строения, сады и парки подчиняются геометрическим законам, которые учитель может обсудить с детьми.

Цель предлагаемых экскурсий — показать учащимся возможности применения геометрических знаний на примерах архитектурных и садово-парковых сооружений.

Основная методика проведения таких экскурсий: от истории создания архитектурного объекта к изучению его внешних форм, расчленение этих форм на детали, определение формы этих деталей, рисование отдельных деталей и здания в целом в разных ракурсах, а затем (чаще всего в качестве домашнего задания) конструирование моделей этих сооружений, а также попытка придумывания новых.

Оснащение экскурсий, как правило, одно и то же: каждый учащийся берет с собой цветные карандаши или фломастеры, пластилин, тетрадь (возможно, альбом для рисования, фотоаппарат).

Мы можем предложить учителю некоторые виды упражнений, которые полезно проводить во время экскурсий.

1. Повернувшись спиной к зданию, перечислите, сколько различных форм окон (колонн, других деталей) оно имеет, нарисуйте их.
2. Нарисуйте с различных точек зрения фасад здания, отдельные его детали, решетки, ограды, фонари и т. д.
3. Посмотрите на различные фотографии одного и того же здания и попробуйте определить, с какого места произведена съемка.
4. Обойдите здание по периметру и определите, нет ли среди видов спереди, справа, сзади, слева одинаковых.
5. По предложенным деталям изображения здания соберите его целиком.
6. Из одних и тех же моделей (например, цилиндров) соберите разные здания: расставьте цилиндры, имеющи-

еся у вас, так, чтобы они напоминали колоннаду сначала, например, Казанского собора, а затем Адмиралтейства.

7. Сравните фотографию здания и его макет, сделанный, например, из пластилина; найдите неточности или ошибки.
8. На предложенном плане парка нарисуйте маршрут экскурсии, укажите места расположения тех сооружений, которые вы увидели по ходу этой экскурсии.
9. Найдите неточности в предложенном плане парка и устраните их.
10. Нарисуйте план видимой вам части парка.

В конце проводимой экскурсии каждый ученик может нарисовать эскиз понравившегося ему архитектурного сооружения. Затем учащиеся вместе отгадывают, что изображено на рисунках, в какой части парка находится эта постройка, задают друг другу вопросы о ней. Рисунки, на которых изображен эскиз одного и того же здания, сравниваются. Каждый эскиз проверяется на соответствие с оригиналом, правильность изображения фигур.

Можно дать ученикам в качестве домашнего задания нарисовать понравившиеся архитектурные сооружения и на следующем уроке геометрии по готовым рисункам детей вспомнить основные этапы экскурсии, а затем устроить в классе выставку детских работ.

Материалы геометрических экскурсий могут служить основой для проектной деятельности учащихся. В качестве коллективной творческой работы можно предложить детям сделать тематический фотоальбом: по элементам симметрии в паркетах, в узорах различных вышивок или рисунков, по замощениям мостовых города и т. д.

6.1. Экскурсия по теме *«Круглые тела в архитектуре»* (Павловский парк)

Урок-экскурсия «Круглые тела в архитектуре» может проводиться как в начале изучения темы для первичного ознакомления с ней, так и в конце — для ее закрепления. Используя слайды, можно провести эту экскурсию и на уроке.

Остановка 1. Перед входом в Павловский парк

Перед нами Павловский парк — один из самых больших и красивейших пригородных парков Санкт-Петербурга. Он был заложен в конце XVIII века при основании лет-

Рис. 83

ней великокняжеской резиденции будущего императора Павла I, в честь которого и получил свое название. В парке есть обелиск в память основания Павловска, на котором укреплена чугунная доска с надписью «Павловское начато строиться в 1777 году». С тех пор этот парк любим и посещаем многими поколениями петербуржцев.

В создании Павловского парка принимали участие талантливые архитекторы разных эпох: Ч. Камерон, В. Бренна, А. Н. Воронихин, К. Росси и др. Каждый из них старался в своих творениях отразить, подчеркнуть особую красоту этих мест.

Тема нашей сегодняшней экскурсии — «Круглые тела в архитектуре».

Круг в Древней Греции считался венцом совершенства. Возможно, для того чтобы подчеркнуть совершенство природы (или как-то приблизиться к нему), весь парк наполнен круглыми (совершенными) постройками.

Какие круглые тела вам известны?

Сегодня на экскурсии мы увидим, как перечисленные вами круглые тела используются в архитектуре, украшают и обогащают архитектурные сооружения, придают зданиям особый и неповторимый облик.

Мы с вами разобьемся на четыре группы: первая будет искать в парке цилиндры, вторая — конусы, третья — сферы, а четвертая — плоские круглые фигуры. Ваша задача — ничего не пропустить!

Каждая группа получит маршрутный лист. На нем уже нанесены речка Славянка, протекающая по парку, аллеи, пруды, лесные массивы. Изобразите на маршрутном листе эскизы архитектурных сооружений в соответствии с их расположением.

Но прежде чем войти в парк, обратите внимание на его ворота и ограду (рис. 83). Здесь можно увидеть все перечисленные вами круглые тела. Какие это тела?

Итак, наша экскурсия начинается.

Остановка 2. Рядом с Храмом дружбы, на противоположном берегу Славянки

Первый создатель паркового ансамбля — архитектор Чарлз Камерон, шотландец по происхождению. Сегодня мы увидим много построек этого зодчего. Одно из самых известных и самых красивых его архитектурных сооружений — Храм дружбы, созданный им в 1782 году. Он сейчас перед вами (рис. 84).

Посмотрите на здание цилиндрической формы. Как органично вписывается оно в окружающую природу, растворяясь в ней! Здесь нет ни прямых линий, ни четких ясных очертаний. Извивается русло Славянки, образуя полуостровок, на котором построен Храм дружбы; извивается тропинка, ведущая к Храму.

Рис. 84

Трудно себе представить, но Камерон строил этот павильон, когда вокруг стеной стоял лес. Храм дружбы рождался одновременно с пейзажем, окружающим его. Это одно из первых парковых сооружений. Первоначально оно предназначалось для завтраков и ужинов семьи Павла I, позднее для проведения концертов.

Обратите внимание на форму здания. Шестнадцать колонн окружают помещение, образуя модель цилиндра. Можно сказать, что здание представляет собой конструкцию из двух моделей цилиндра: сплошной модели цилиндра и модели, составленной из 16 равных отрезков (16 одинаковых колонн). Здесь на примере одного архитектурного сооружения мы смогли увидеть не только геометрическую фигуру цилиндр, но и способ его построения из равных отрезков.

Встаньте таким образом, чтобы вы образовали модель прямого цилиндра.

А теперь обратите внимание на другие элементы здания. Есть ли среди них такие, которые тоже имеют цилиндрическую форму?

Присмотримся к куполу Храма — и увидим, что он состоит из цилиндров, поставленных один на другой так, что основание каждого следующего цилиндра — круг меньшего радиуса.

Рассмотрим подробнее эту конструкцию из цилиндров. Представьте себе, что высоты цилиндров малы, а радиусы их оснований постепенно уменьшаются... Тогда поверхность купола Храма будет приближаться к сферической.

Из уроков геометрии вы знаете, что для некоторых плоских фигур существуют их пространственные аналоги, например для треугольника — это тетраэдр, для квадрата — куб. Для какой плоской фигуры пространственным аналогом является сферическая поверхность?[1] ... Для окружности.

Наша экскурсия была бы неполной, если бы мы не рассмотрели окружность и круг как декоративные элементы архитектурных сооружений. Пройдем к мостику, расположенному недалеко от Храма, и рассмотрим, какую роль играют эти фигуры в конструкции ограды.

Остановка 3. У Чугунного мостика

Перед нами Чугунный мостик (рис. 85). Очень легкий, грациозный, один из красивейших в парке, он был построен архитектором К. Росси спустя 40 лет после сооружения

[1] Здесь и далее: учитель выслушивает ответы учеников и обобщает их. После отточия приведен правильный ответ.

Рис. 85

Храма дружбы. Но между этими постройками чувствуется связь. В орнамент постаментов ваз архитектор включил изображение дельфинов, мы уже видели их среди элементов декора Храма дружбы.

Знаете ли вы, что символизируют дельфины? ... Дельфины — символ преданности, дружбы, и поэтому не зря архитектор включил их в декоративное оформление Храма.

Из каких фигур состоит ограда Чугунного мостика? ... Из эллипсов.

Поднимемся на мостик и встанем прямо перед его оградой. Какими геометрическими фигурами образовано чугунное кружево ограды моста? ... Теперь мы видим окружности.

На уроках геометрии мы с вами говорили, что круглые предметы, окружающие нас, мы можем видеть по-разному в зависимости от того, как мы на них смотрим. В данном случае, если на ограду моста посмотреть спереди, то мы увидим конструкцию из окружностей, а если посмотреть сбоку — из эллипсов.

А как будут выглядеть окружности ограды, если смотреть на них сверху? ... Конечно, мы увидим отрезки.

Посмотрите на рисунок ограды моста, образованный окружностями. Найдите и покажите на нем какие-нибудь две окружности, имеющие две общие точки. Есть ли среди окружностей ограды две такие, которые имеют только одну общую точку? Не имеют общих точек?

Проверим вашу наблюдательность. Отвернитесь. Как вы думаете, из какого количества окружностей состоит ограда моста? ... Давайте посчитаем.

Мы с вами прошли небольшую часть парка, но, наверное, вы уже увидели, насколько удивительно красива здесь природа. Почти нетронутые лесные массивы, извилистое русло Славянки, привлекательные холмики на ее берегах — все это гармонично сочетается с произведениями паркового искусства. Здесь столько живописных, уютных уголков, настраивающих человека на поэтическое, лирическое настроение!

Создатели парка захотели подчеркнуть красоту и очарование этих мест. Поэтому в некоторых уголках парка они разместили статуи древнегреческого бога, покровителя красоты. К одному из таких мест мы с вами сейчас и подойдем.

Остановка 4. Колоннада Аполлона

Мы находимся перед Колоннадой Аполлона (рис. 86). Аполлон — один из древнейших греческих богов, покровитель красоты и искусств. В Павловском парке вы можете увидеть несколько его статуй. Этим создатели парка хотели подчеркнуть, что Павловск — место, наполненное не только природной красотой, но и искусством — красотой, созданной руками человека. Колоннада, как и Храм дружбы, была построена первым создателем парка — архитектором Ч. Камероном в 1782—1783 годах. Мария Федоровна, жена Павла I, хозяйка парка, отмечала: «Колоннада и Храм в Павловском доставляют мне больше радости, чем красоты Италии».

Колоннада Аполлона в первоначальном виде до нас не дошла. Она была задумана следующим образом: в центре находился древнегреческий бог, а вокруг него двойным кольцом стояли колонны, несущие на себе тяжелое перекрытие (рис. 87).

Шло время... Так случилось, что несколько колонн упали, и, казалось бы, архитектурное сооружение должно было отчасти потерять свою красоту. Однако время лишь придало ему новое очарование: теперь на Колоннаду открылся вид, может быть, еще более интересный, чем был задуман Ч. Камероном. Со стороны дворца стала видна статуя Аполлона, а вокруг нее образовались живописно разбросанные руины. В таком виде и решили оставить это сооружение.

Рис. 86

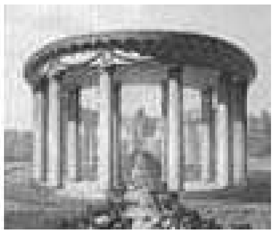


Рис. 87

Рис. 88

Подумайте, можно ли считать моделью цилиндра оставшуюся часть Колоннады. Объясните почему.

Посмотрите на колонны. Верно ли, что они представляют собой цилиндры? ... Нет, это неверно. Очень часто, как и в этом случае, колонны имеют форму не цилиндра, а усеченного конуса. Для человеческого глаза иногда это заметно больше, иногда меньше. Колонны в форме усеченного конуса придают строению большую устойчивость, они зрительно увеличивают высоту здания и создают эффект устремленности его вверх.

Оглянитесь, нам видна часть центрального архитектурного сооружения парка — дворца императора Павла I. Сейчас он обращен к нам своим западным фасадом. Но все великолепие Павловского дворца можно увидеть и оценить по его главному, восточному фасаду (рис. 88). Туда мы сейчас и направимся.

Остановка 5. Павловский дворец

Остановимся на минуту у фонарика, расположенного на южном фасаде дворца (рис. 89). Сверху и снизу он украшен шишками.

Какая известная вам геометрическая фигура лучше всего описывает форму шишки? ... Конечно конус.

Слово «конус» древнегреческого происхождения. Греческое слово konos буквально переводится на русский язык как «еловая шишка».

Рис. 89

Поэтому форму, подобную форме еловой шишки, назвали конусом. Однако, строго говоря, еловая шишка не является моделью конуса. Объясните почему.

Мы подошли к главному фасаду Павловского дворца. Дворец поражает своей простотой. Но одновременно мы понимаем, что стоим перед уникальным, неповторимым своей красотой сооружением. Дворец был построен Ч. Камероном довольно быстро. Начатый в 1782 году, он был завершен через четыре года.

В дальнейшем над созданием дворца и отделкой его залов работали другие величайшие мастера прошлого: В. Бренна, Д. Кваренги, А. Н. Воронихин, К. Росси. Однако все они старались не нарушать замысла своего предшественника, одновременно привнося в создание интерьеров дворца что-то свое, индивидуальное.

Обратите внимание, в геометрии дворца очень много круглых элементов. Крыша купола — это часть сферической поверхности. Барабан купола напоминает нам модель цилиндра, которую мы делали из отрезков в классе. В то же время колонны на барабане купола, так же как и на фасаде, и в колоннадах, можно рассматривать как отдельные цилиндры.

Какие еще геометрические формы были использованы зодчими в архитектуре дворца?

Посмотрите на одно из окон этого фасада дворца. Конструкцию из каких геометрических фигур представляет его решетка? ... Действительно, перед нами конструкция из отрезков. Подойдем к окну ближе и посмотрим на решетку внимательнее. Теперь можно заметить, что каждый из отрезков представляет собой тоненький чугунный цилиндр. Толщина этих цилиндров, когда мы смотрели издали, для нас не была существенной, поэтому мы посчитали их реальными отрезками.

Внимательно всмотритесь во дворец, попробуйте разглядеть и запомнить даже мелкие его детали, вслушаться в ритм колонн, бегущих по фасаду. А теперь отвернитесь. Я буду вам показывать картинки, представляющие дворец с какими-то незначительными искажениями. Ваша задача — заметить ошибки в изображении и исправить их.

Какие ошибки вам удалось найти?

1. На барабане купола дворца реже, чем на самом деле, расставлены колонны, изменено их количество.
2. Вместо постамента, на котором установлен памятник Павлу I, изображен постамент Медного всадника — Гром-камень.
3. На главном фасаде центрального корпуса дворца вместо восьми парных колонн изображены только четыре.

4. Часть окон дворца, имеющих закругленную форму, заменена окнами другой формы.

На этом мы с вами покинем центральную часть Павловского парка и снова спустимся вниз, в долину реки Славянки, где нас ждут не менее интересные архитектурные сооружения.

Остановка 6. У Висконтиева моста

Перед нами Висконтиев мост (рис. 90). Издалека он привлек наше внимание своим необычным силуэтом — широким арочным пролетом, каменными вазами, поставленными на высокие постаменты. Под мостом мы видим плотину, которая еще сильнее подчеркивает интересные формы моста. Висконтиев мост был сооружен в 1807 году по проекту архитектора А. Н. Воронихина. (Какие произведения этого зодчего в Петербурге вам известны?) А. Н. Воронихин долгое время был главным архитектором Павловска; талантливый зодчий очень много сделал для Павловского дворца и парка. Почему же мост называется Висконтиевым? Дело в том, что руководил постройкой моста (по проекту Воронихина) «каменных дел мастер» Карло Висконти. Мост носит его имя.

Определите, какие круглые тела или их части были использованы архитектором в конструкции моста и его декоративных элементов. ... Поверхность самого моста — часть поверхности цилиндра. Свод моста также имеет цилиндрическую форму, только основания у этого цилиндра не круглые, а овальные, очень близкие к эллипсу. Мы с вами говорили, что сбоку окружности можно увидеть эллипсами.

Рис. 90

Рис. 91

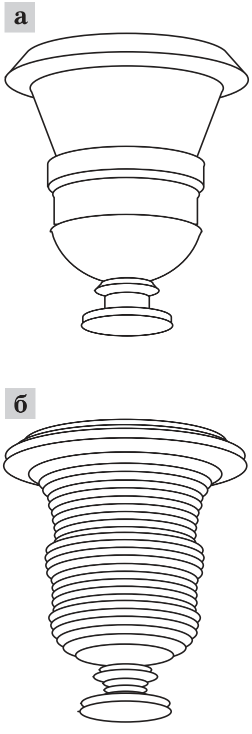


Рис. 92

Оказывается, и наоборот: эллипс можно с определенной точки зрения увидеть окружностью. Найдите такое направление, с которого край свода моста можно увидеть как часть окружности (рис. 91).

Посмотрите, есть ли круглые тела в декоративных элементах моста. ... Вазы можно представить как конструкцию из частей конусов, цилиндров и шаров (рис. 92, *а*).

Нарисуйте эскиз вазы. А дома аккуратно (можно с помощью шаблонов) нарисуйте такую вазу. Еще вазу можно представить как конструкцию из горизонтально расположенных кругов (рис. 92, *б*).

У нас сегодня тема экскурсии — «Круглые тела», но давайте вспомним и про многоугольные цилиндры и конусы, т. е. те, у которых в основании лежат многоугольники, — призмы и пирамиды. Найдите примеры таких цилиндров и конусов. ... Подставки под вазы — прямоугольные параллелепипеды. Кроме того, рассматривая постаменты для ваз от самой воды, мы увидим, что они сконструированы из частей четырехугольных пирамид и прямых четырехугольных призм с квадратом в основании. Нарисуйте дома постамент вместе с вазой так, как можно их увидеть сверху. Есть ли еще в конструкции этого моста параллелепипеды? ... Конечно, есть — это тумбы в перилах, только заметьте, что они разные. Чем они отличаются? ... Они наклонные. Дело в том, что поверхность моста по краям наклонена. Если там поставить прямую тумбу, такую, как наверху, то она не будет стоять вертикально и станет менее устойчивой. Итак, можно сказать, что в ограде моста архитектор использовал разные параллелепипеды: прямые и наклонные, и чем ближе к краям моста, тем более наклонные эти параллелепипеды (рис. 93).

Мы прошли довольно большую часть парка, и вы уже, конечно, заметили, что в архитектуре его строений зодчими часто использовались формы круглых тел. С какими круглыми телами нам пришлось встречаться чаще всего? ... В большинстве построек архитекторы применяют цилиндрическую форму (вспомните, например, колонны). Реже мы видели сферу (точнее, полусферу как завершающую часть здания), а с явным использованием конической поверхности в архитектуре постройки за время нашей экскурсии мы пока еще не встречались. Сейчас мы познакомимся с архитектурным сооружением, единственным в парке, в архитектуре которого использована форма кругового конуса.

Рис. 93

Остановка 7. Рядом с Пиль-башней

Мы подошли к одному из самых интереснейших сооружений парка — Пиль-башне (рис. 94). Она построена архитектором В. Бренной в 1797 году.

Два столетия назад архитектор попытался сделать этот уголок парка похожим на настоящую деревеньку XVIII века: так среди замечательных построек парка появилась водяная мельница. Издали можно было услышать, как вращались ее колеса, журчала вода. Мельницы назывались пильными (водяные колеса приводили в движение лесопильную раму), поэтому и главное сооружение этого местечка назвали Пиль-башней.

Первые пильные мельницы появились в Голландии в XI веке. Вначале они представляли собой примитивную лесопильную раму, приводившуюся в движение от ветряной мельницы. Позднее начал внедряться привод лесопильных рам от водяных колес (водяные пильные мельницы). В России пильные мельницы известны с XVIII века.

Рис. 94

Внешне мельница выглядела очень скромно и даже несколько запущенно. Но стоило оказаться внутри неказистой с виду Пиль-башни, и можно было увидеть шикарное помещение, своей отделкой напоминающее покои дворца.

Не правда ли, интересный контраст применил автор? Внешняя простота, незатейливость деревенской мельницы — и внутренняя роскошь императорского строения!

Посмотрите на здание. Какая геометрическая фигура описывает форму этого здания? ... Пиль-башня имеет цилиндрическую форму и завершается конической крышей. Сочетание этих геометрических форм было широко распространено в древнерусском зодчестве. Вспомните и назовите еще какие-нибудь сооружения, в архитектуре которых совмещены цилиндр и конус.

Обратите внимание на лестницу, плавно огибающую цилиндрическую форму башни. Ее перила представляют собой модель винтовой линии. Это пространственная линия. Она обладает интересным свойством: оказывается, чтобы измерить по цилиндрической поверхности расстояние между двумя ее точками, не лежащими на одной окружности или прямой, надо соединить их винтовой линией — самой короткой линией, лежащей на поверхности цилиндра и соединяющей эти точки.

Здесь можно увидеть еще одну винтовую линию. Она проходит вдоль стены башни через уголки ступенек.

Рядом с Пиль-башней расположен Пиль-башенный мост. Обратите внимание на его ограду. Из каких фигур она состоит? ... Каждая из этих фигур — цилиндр, в основании которого лежит шестиугольник. Это шестиугольные призмы.

До сих пор мы видели павильоны, в архитектуре которых преимущественно использовались различные круглые формы. А сейчас мы увидим, как в одном архитектурном сооружении могут сочетаться плоские и цилиндрические поверхности.

Остановка 8. У Круглого зала

Павловск был знаменит не только своим великолепным парком и его достопримечательностями. Не одно десятилетие Павловск славился своими замечательными концертами.

Мы находимся рядом с Круглым залом (рис. 95), созданным по проектам архитекторов Ч. Камерона и В. Бренна в 1799—1800 годах.

Этот павильон предназначался для отдыха после прогулок верхом или в экипажах, для камерных концертов

Рис. 95

или танцевальных вечеров. В нем в разные годы пел Ф. И. Шаляпин, выступали И. Штраус и другие выдающиеся музыканты и композиторы. Поэтому со временем Круглый зал получил второе название — Музыкальный салон. В наше время традиция музыкальных вечеров в этом зале возродилась. Здесь часто проводятся концерты классической музыки.

Обратите внимание на форму здания, а точнее, на сочетание различных геометрических форм. Два фасада здания — плоские (мы видим прямоугольный фасад с треугольным фронтоном), два другие — круглые (представляют собой цилиндрическую поверхность). Интересно, что плоские фасады выделены круглыми формами: колоннами, окнами в виде полукругов, а линии окон на круглых фасадах таковы, что окна кажутся нам плоскими, имеющими форму прямоугольника.

Подумайте, как удалось строителям вырезать прямоугольные окна на цилиндрической поверхности. И вообще, можно ли на цилиндрической поверхности нарисовать прямоугольник? Ответ обоснуйте.

Наша экскурсия «Круглые тела в архитектуре» подходит к концу.

В завершение отметим: круглые тела так богаты внутренним содержанием, что при использовании их в архитектуре можно, избежав каких-то лишних украшений, добиться особой выразительности зданий. Вы, несомненно, это заметили на примере сооружений Павловского парка. Здесь все очень просто и выразительно.

Что вам больше всего понравилось, запомнилось в экскурсии?

Задайте ваши вопросы и запишите домашнее задание: закончить начатые рисунки и нарисовать эскизы наиболее понравившихся вам архитектурных сооружений.

Нам осталось определить победителя сегодняшней экскурсии. Покажите свои маршрутные листы, мы сверим их с планом парка.

Учитель определяет победившую группу, выставляет оценки. На следующем уроке геометрии по изготовленным детьми эскизам вспоминаются основные этапы экскурсии. Учащиеся вместе определяют, что изображено на рисунках, в какой части парка находятся эти сооружения, задают друг другу вопросы о них.

Рисунки, на которых изображены эскизы одного и того же сооружения, сравниваются. Каждый рисунок проверяется на соответствие с оригиналом (например, с помощью фотографии) и правильность изображения фигур.

Используя иллюстративные материалы, учитель на уроке может провести викторину.

Примерные вопросы:

1. На каком из увиденных вами зданий купол имеет коническую форму?
2. Сколько колонн Храма дружбы образуют модель цилиндрической поверхности?
3. В каких архитектурных сооружениях зодчими не была использована цилиндрическая форма? Есть ли такие?
4. В каких из увиденных вами сооружений архитектор использовал наименьшее количество различных геометрических форм? Перечислите эти сооружения.
5. Верно ли, что древнегреческий бог Аполлон является покровителем строительства, архитектуры?
6. Сколько колонн сохранилось до нашего времени в Колоннаде Аполлона?
7. Назовите архитекторов, создававших Павловский парк.
8. Моделью какой линии (прямой, кривой, ломаной) можно считать: а) тропинку, ведущую от Храма дружбы к Чугунному мостику; б) дорогу от Музыкального салона к вокзалу?
9. Является ли плоской поверхность Чугунного мостика?
10. Верно ли, что один из прудов парка имеет форму круга?
11. В ограде какого из мостов парка использованы элементы, имеющие форму: а) призмы; б) усеченного конуса?
12. Зная, что Колоннада Аполлона находится у западного фасада дворца, а памятник Павлу I — у восточного, сориентируйтесь, какой из фасадов дворца мы не видели.

6.2. Экскурсия по теме *«Геометрические формы в архитектуре»* (Екатерининский парк, г. Пушкин)

Экскурсия проводится в конце учебного года как обобщающий урок по пройденному геометрическому материалу в 5 классе. На плане Екатерининского парка (рис. 96) отмечен маршрут экскурсии.

Остановка 1. На верхней террасе дворца

Мы находимся в Царском Селе — загородной резиденции русских императоров, в месте, которое воспели в стихах многие побывавшие здесь поэты.

Тема нашей сегодняшней экскурсии — «Геометрические формы в архитектуре». Мы будем продолжать развивать свою наблюдательность, учиться смотреть на окружающий нас мир и видеть в нем разнообразие геометрических форм; повторим изученные на уроках геометрии фигуры, их виды; попытаемся геометрически изобразить творения человека и природы, находящиеся рядом с нами.

Посмотрите в глубину парка. Можно сказать, что он рожден геометрией. Пруды в форме различных геометрических фигур; аллеи, разбегающиеся во все уголки парка в строгой симметрии; деревья, стоящие по краям аллей и превращенные рукой садовода в сплошные зеленые стены; кустарники, подстриженные в форме различных геометрических тел, — все подчиняется законам геометрии. Идеальный порядок царствующей здесь геометрии нару-

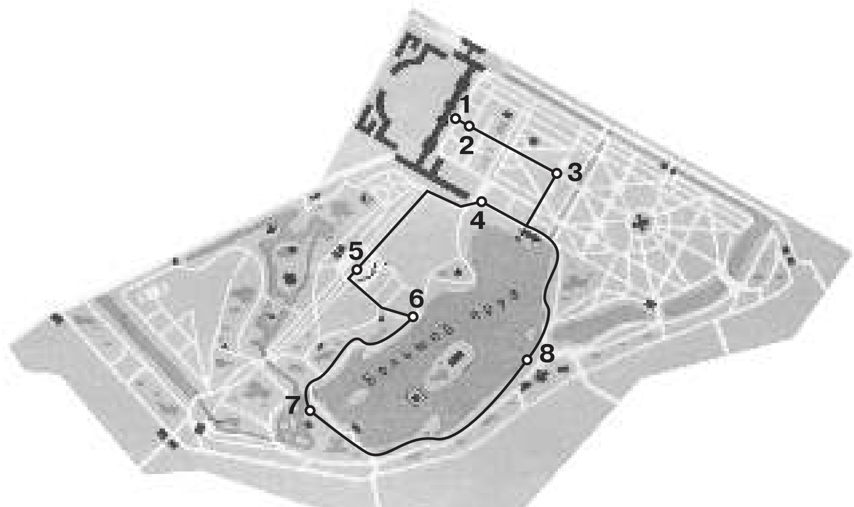


Рис. 96

шают лишь деревья, свободно раскинувшие свои ветви над аккуратно подстриженной растительностью. Это господство геометрии было нарушено в конце XVIII века, когда парки, казавшиеся в то время чересчур искусственными, вышли из моды, и деревья на аллеях перестали подстригать. До этого парк выглядел еще более изысканно и строго, чем сейчас.

Разбейтесь на четыре группы. Каждой группе в ходе экскурсии будут даны различные задания, за правильное выполнение которых она получит жетон. Победителем сегодняшней игры будет та группа, которая во время экскурсии наберет больше всего жетонов.

Наша экскурсия начинается.

Остановка 2. Газон перед Екатерининским дворцом

Мы находимся перед Большим Екатерининским дворцом, история которого наполнена множеством радостных и трагических событий. Глядя на его удивительно красивый и нарядный вид, трудно себе представить, что в 1944 году на месте этого великолепного дворца стояли голые кирпичные стены, а вокруг пылал огонь.

Первый дворец был построен в 1724 году для Екатерины I, жены Петра I. Это было небольшое двухэтажное здание по восемь комнат на каждом этаже. Дочь Петра I Елизавета при вступлении на престол издала указ о расширении дворца, повелев превратить это место в роскошную загородную резиденцию. Дворец был перестроен архитекторами А. В. Квасовым и С. И. Чевакинским.

В 1752 году Елизавета Петровна подписала новый указ о капитальной перестройке здания, и за четыре года под руководством придворного архитектора Б. Растрелли был построен великолепный дворец. Но и этот дворец отличался от того здания, которое сейчас находится перед нами: еще неоднократно оно перестраивалось.

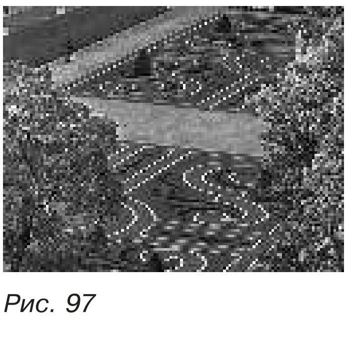


Рис. 97

Обратите внимание на выстриженный перед дворцом газон (рис. 97). Какой геометрической фигурой может быть изображена его форма? ... Этот газон прямоугольной формы похож на ковер — так причудливо и изящно «вытканы» на нем различные фигурки из цветного песка, угля и толченого стекла.

Сколько здесь различных по форме линий, как плавно переходят они друг в друга!

Какого вида линии «выткал» на этом ковре художник? Есть ли среди них замкнутые (незамкнутые), самопересекающиеся (простые) линии? ... Мы видим различные кривые линии, замкнутую ломаную линию — границу прямоугольника.

Из каких уже известных вам геометрических фигур состоят эти кривые и ломаные линии? ... Из отрезков и дуг окружностей.

Окружность и прямая — две важнейшие плоские геометрические линии. Из частей этих двух фигур, дуг и отрезков, можно сконструировать самые разнообразные линии, красивые узоры, различные плоские и пространственные геометрические фигуры. Вспомните и назовите, какие фигуры мы конструировали из отрезков на уроках геометрии.

По углам газона посажены деревья. Какой геометрической фигурой может быть изображена форма этих деревьев? ... Конусом. А если приглядеться внимательнее, то можно увидеть в некоторых деревьях пирамиду.

Посмотрите теперь на дворец (рис. 98). Его фасад тянется на 300 м, но как разнообразны украшающие его де-

Рис. 98

Рис. 99

коративные детали! На всей протяженности здания к нему приставлены различные колонны: одни вплотную прижаты к стене, другие пытаются отодвинуться от нее, третьи стоят отдельно. Какую форму имеют эти колонны? ... Форму цилиндра, усеченного конуса. Обратите внимание: среди колонн на фасаде дворца есть такие, которые имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

Проверим вашу наблюдательность. Посмотрите еще раз на дворец. Отвернитесь. Сколько колонн на парадном входе дворца имеют форму прямого кругового цилиндра? прямоугольного параллелепипеда? усеченного конуса?

Сейчас каждая группа нарисует те формы окон, которые запомнились. За каждый правильный рисунок группа получает жетон.

Посмотрите снова на фасад дворца. На нем можно увидеть множество сложных по геометрии декоративных деталей. Найдите среди них линии, которые нельзя сконструировать только из дуг и отрезков. ... Некоторые лепные украшения имеют форму спирали (рис. 99), но эти спирали можно сконструировать из дуг окружностей. Попробуйте дома с помощью циркуля построить такую линию. А вот линию, которая отходит от спирали, построить нельзя. Это пространственная линия.

Теперь немного поиграем: проходя по центральной аллее в глубь парка, внимательно всматривайтесь в окружающие объекты и постарайтесь увидеть как можно больше геометрических фигур, плоских и пространственных.

Остановка 3. Центральная аллея, недалеко от Грота

Какие геометрические фигуры вы увидели, рассматривая парк? ... Пьедесталы статуй имеют форму куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой восьмиугольной призмы; газоны — форму четырехугольников (в частности, прямоугольников, трапеций). Кроны деревьев подстрижены в форме шара, конуса, прямоугольного параллелепипеда. Пруды — это прямоугольники с «закругленными» углами, а архитектурное сооружение, стоящее на берегу одного из прудов — «Верхняя ванна», — представляет собой конструкцию из призм, в том числе из параллелепипедов (рис. 100). Купол Грота — часть сферы (рис. 101).

Рис. 100

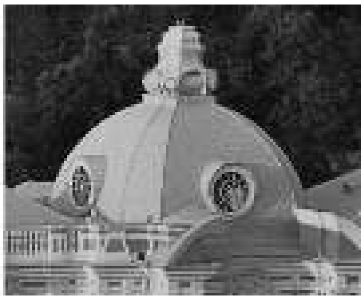


Рис. 101

Продолжим нашу экскурсию.

Мы находимся на главной аллее парка. Сейчас, когда мы немного отошли от дворца, оглянитесь и посмотрите на его фасад. Какой геометрической фигурой вы изобразили бы теперь колонны? ... На некотором расстоянии от дворца колонны представляются нам уже не прямыми цилиндрами и призмами, как раньше; теперь колонны видны как прямоугольники, потому что их толщина не видна. Именно прямоугольниками мы и изобразили бы их на листе бумаги, рисуя план фасада дворца.

Подумайте, какие геометрические фигуры понадобились бы нам для изображения этих колонн-прямоугольников, если бы мы могли отойти еще дальше. ... Отрезки, так как мы увидели бы только протяженность этих колонн, их высоту.

Посмотрите налево. Перед вами «Грот» — небольшой павильон, который так же, как и дворец, построен зодчим

Рис. 102

Б. Растрелли (рис. 102). Проект этого павильона Растрелли разработал летом 1749 года, а его полная отделка была завершена лишь к 1763 году.

Грот очень напоминает дворец: такой же утонченный и изящный по своей архитектуре, только меньших размеров. Посмотрите на украшающие его детали, элементы отделки. Так же, как и дворец, Грот украшает множество великолепных колонн. Обратите внимание на форму этих колонн. Верно ли, что они имеют форму цилиндра? ... Колонны Грота отличаются по форме от колонн дворца. Ни одна из них не является ни прямоугольным параллелепипедом, ни призмой, ни круговым цилиндром. Можно сказать, что колонна образована множеством круговых цилиндров разных размеров: на один цилиндр поставлен другой, с меньшим радиусом основания, радиус основания следующего цилиндра опять увеличивается, затем снова уменьшается и т. д.

Нечто подобное мы видели и на фасаде дворца. Ну-ка, самые наблюдательные! Скажите, в каких деталях фасада дворца архитектор использовал тот же прием, что и при отделке колонн Грота? ... Растрелли выделил таким же образом углы здания. Когда мы будем выходить из парка, я обращу на это ваше внимание.

А теперь посмотрите на оформление газонов перед Гротом.

Каждый газон представляет собой определенную геометрическую фигуру, причем ни одна из них не повторяется. Нарисуйте эти фигуры у себя в тетради и перечислите их. Та группа, которая найдет большее количество различных по форме фигур и быстрее справится с заданием, получит жетон.

Остановка 4. Напротив лестницы Камероновой галереи

Рассматривая газоны, мы вышли к Камероновой галерее, названной так в честь создавшего ее зодчего — Ч. Камерона. Галерея была возведена архитектором в 1783—1787 годах (рис. 103). Это архитектурное сооружение отличается от тех, которые мы видели раньше в парке.

Чарлз Камерон — архитектор совершенно другого стиля, ему чужды усложненность форм, бесконечное разнообразие декоративных деталей, излишняя нарядность Большого дворца и Грота. Архитектор живет в мире «благородной простоты и спокойного величия», который был характерен для эпохи Древней Греции и Древнего Рима. В таком духе и строит он свою галерею. Чтобы каким-то

Рис. 103

образом связать друг с другом такие разные по стилю здания (галерею и сооружения Б. Растрелли), Камерон строит грациозную лестницу, спускающуюся от галереи в аллеи, ведущие к Гроту (рис. 104).

Она сейчас перед вами. Изящество лестницы, ее форма связывают галерею с предшествующими постройками парка.

Рассмотрите два нижних пролета лестницы с геометрической точки зрения. Конструкцию из каких фигур они представляют? ... Из прямоугольных параллелепипедов.

Задание группам: изобразите вид спереди этой части лестницы.

Рис. 104

Рис. 105

От галереи ведет еще один спуск — прямо в парк. Перед Камероном встала новая задача: связать построенную галерею с парком, раскинутым перед ней. Обсудите в группах возможные решения этой задачи, можете их нарисовать.

Посмотрим, как решил эту проблему талантливый зодчий. Пройдем немного дальше. Перед нами архитектурное сооружение, называемое *пандус* (рис. 105). Пандус — это слегка наклоненная плоскость, заменяющая лестницу, применяемая также для въезда экипажей на верхнюю площадку крыльца. В переводе с французского *pente douce* — пологий склон.

Приведите примеры пандусов, с которыми вы встречались в Санкт-Петербурге. ... Парадный подъезд Зимнего дворца, подъем на подиум Биржи, на мост, спуск в подземный уличный переход.

Обратите внимание: архитектор выделил пандус, выводящий нас в Екатерининский парк, одной и той же повторяющейся геометрической формой, которая постепенно приобретает все меньшие и меньшие размеры. Уходящий в глубь парка пандус связал галерею с природой, царящей вокруг нее.

Для достижения полной гармонии архитектуры и природы Ч. Камерон украсил этот ансамбль висячими садами, подобными одному из «семи чудес света» — «висячим садам» Семирамиды, построенным в Вавилоне царем Навуходоносором II. Прямо из галереи можно было попасть в сад и, еще не спустившись на землю, оказаться в густой зелени под раскидистыми ветвями деревьев.

Рис. 106

Посмотрите на колоннаду Камероновой галереи (рис. 106). Какую форму имеют ее колонны? ... Форму усеченных конусов.

В Древнем Риме одним из принципов построения здания было отождествление его элементов с окружающей природой. Колонны в форме усеченных конусов отождествлялись римлянами со стволами деревьев.

Посмотрите на боковую поверхность колонн. Она состоит из желобков, которые называются каннелюрами. Нарисуйте основания колонн Камероновой галереи.

Остановка 5. На Гранитной террасе

Пандус незаметно вывел нас в глубь парка. Сейчас мы находимся на Гранитной террасе, построенной архитектором Луиджи Руска в 1810 году вместо существовавшей здесь когда-то катальной горки (рис. 107). Внизу под нами расстилается разноцветный ковер. На этот раз его узор образован не разноцветными камнями и стеклышками, как на газоне у дворца. Рисунок ковра выткан цветами. Обратите внимание: цветы посажены так, что они образуют рисунок из различных геометрических фигур.

Раньше весь парк утопал в цветах. Побудем садоводами: посмотрите на какой-нибудь участок луга и мысленно вытките на нем ковер из цветов. Достаньте ваши тетради, цветные карандаши. Пусть каждая группа нарисует его. Только помните: ваш ковер должен сочетаться со всей природой и архитектурой парка. Одна команда может представить несколько рисунков. За каждый дополнительный красивый геометрический узор из цветов

Рис. 107

команда получает жетон. На выполнение задания отводится 10 минут.

С Гранитной террасы открывается красивый вид на озеро. Чувствуется, что, разбивая парк, его создатели придавали озеру большое значение. Сколь живописны его берега, как украшают их архитектурные постройки!

Подойдем ближе к озеру и рассмотрим архитектурные сооружения на его берегах.

Остановка 6. На берегу озера (мыс «Звездочка»)

Мы вышли на небольшой полуостров. Перед нами раскинулось озеро. Посмотрите на его живописные, извилистые берега. Как вы думаете, это дело рук человека или природы?

Озеро изначально имело другие очертания. Когда разбивался парк, всему, что в нем было: газонам, аллеям, растительности, — пытались придать геометрическую форму. И это озеро имело вид шестиугольника. Но затем его однообразным прямолинейным берегам искусственно придали извилистость, благодаря чему у нас и возникает впечатление естественной, нетронутой природы.

Посмотрите на архитектурные сооружения, построенные на берегах озера: Грот (см. рис. 102), Чесменскую колонну (рис. 108, *а*), Турецкую баню (рис. 108, *б*), Адмиралтейство (рис. 108, *в*), Мраморный мост (рис. 108, *г*). Все они, кроме Грота, поставлены в память о победах в войне с Турцией (1768—1774).

Посреди озера возвышается Чесменская колонна (рис. 108, *а*), названная так в честь победы над турками в Чесменской бухте Эгейского моря в 1776 году. На ее вершине орел ломает полумесяц — эмблему побежденной Турции. Это произведение талантливого зодчего А. Ринальди создано в 1771—1778 годах. Какую форму имеет пьедестал этой колонны, ее вершина, сама колонна? ... Колонна имеет форму усеченного конуса. Ее вершина представляет собой конструкцию из прямоугольных параллелепипедов разных размеров, пьедестал — конструкцию из усеченной пирамиды и прямоугольных параллелепипедов.

Какую похожую колонну вы знаете в Санкт-Петербурге? ... Чесменская колонна напоминает Ростральные колонны на Стрелке Васильевского острова. Тип ростральной колонны восходит к Древнему Риму, где такие колонны возводились в честь морских побед, а отрубленные ростры (носы кораблей) являлись военными трофеями. Традиция эта была продолжена и в нашей стране. Чесменская колонна тоже является ростральной, на ней шесть ростр.

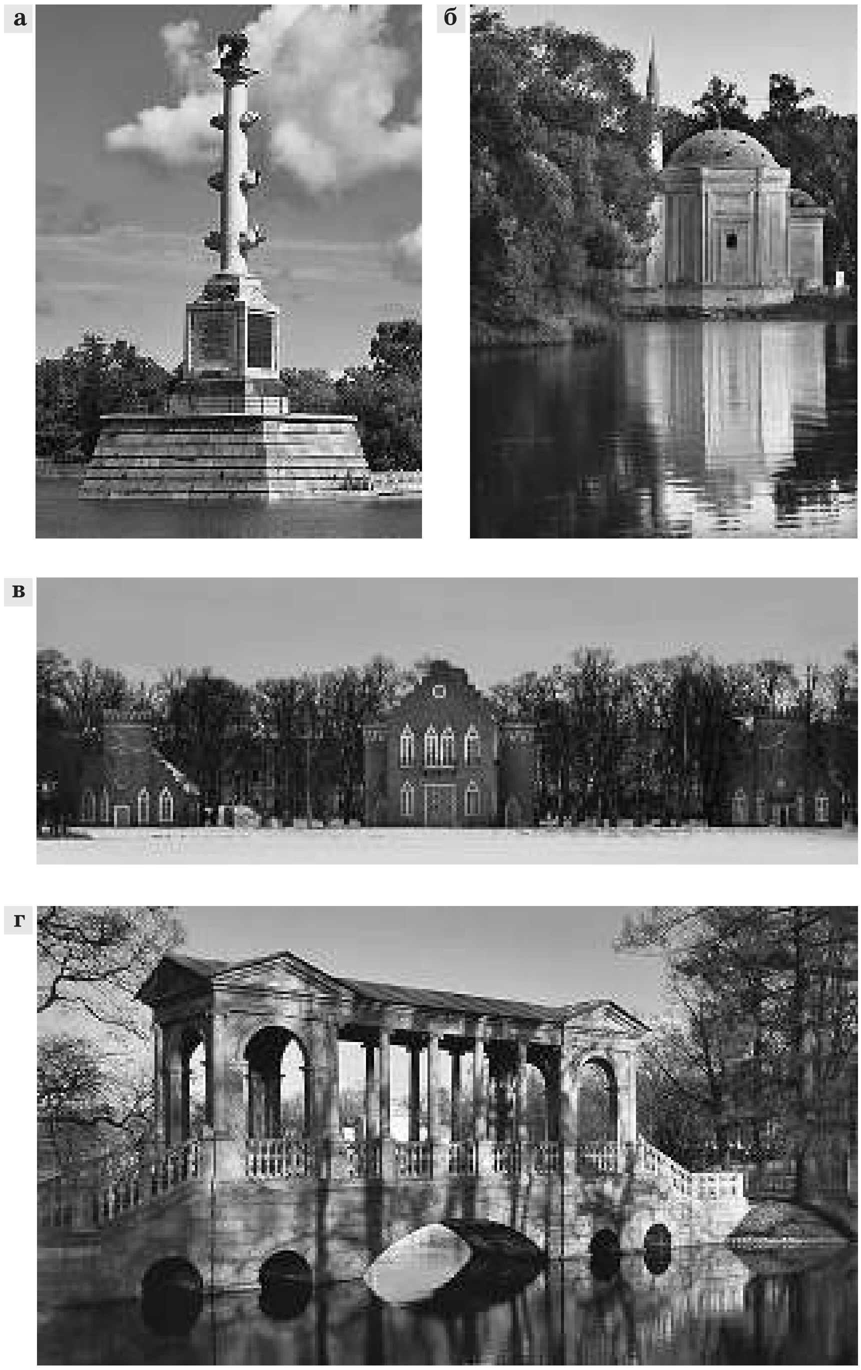


Рис. 108

Прямо перед нами расположены три красных кирпичных здания. Они построены в 1777 году по проекту архитектора В. И. Неёлова. Это Адмиралтейство (рис. 108, *в*). Вы, безусловно, знаете, что назначение Адмиралтейства — служить верфью, заводом для постройки кораблей. Возникает вопрос: неужели в Екатерининском парке строились корабли? Нет, в центральном здании Адмиралтейства хранились гребные и парусные лодки. В боковых корпусах, называемых Птичными домиками или Птичниками, содержались черные и белые лебеди, павлины, фазаны и утки.

По своей архитектуре Адмиралтейство резко отличается от большинства других парковых сооружений. В оформлении павильона использованы элементы готических построек — стрельчатые башни, шпили, высокие окна, декоративная кладка стен. Посмотрите на стены зданий. На их поверхности вырезаны различные геометрические фигуры. Назовите их. ... Мы видим квадрат, треугольники (прямоугольный, равносторонний), прямоугольник, ломаные и кривые линии, круг, эллипс, окружности.

Какую форму имеют центральный корпус Адмиралтейства, птичьи корпуса? ... Центральный корпус представляет собой конструкцию из цилиндров и прямоугольных параллелепипедов. Птичий корпус имеет форму цилиндра.

Какова форма окна на его стене? ... Форма круга.

Теперь посмотрите направо. Прямо перед нами треугольник, наклоненный к земле. Какого он вида? Скорее всего, за этим равнобедренным треугольником кроется какая-то пространственная фигура. Интересно, какая? Зарисуйте ваши варианты.

Как много вариантов фигур вы изобразили, видя только равнобедренный треугольник! Давайте подойдем к нему и проверим ваши гипотезы.

Остановка 7. Рядом с пирамидой

Мы находимся у этого «загадочного» сооружения. Тайна наклоненного к земле треугольника разгадана — перед нами пирамида (рис. 109). Какой многоугольник лежит в ее основании? Для ответа на этот вопрос обойдем пирамиду. ... В основании лежит четырехугольник (квадрат).

Эта четырехугольная пирамида, похожая на маленькую усыпальницу египетских фараонов, построена русским архитектором В. И. Неёловым в 1773 году.

Из уроков истории вы знаете, что египетские пирамиды — это гробницы, в которых хранились мумии фараонов после их смерти. О строительстве самой известной из египетских пирамид — пирамиды Хеопса — вы могли прочитать во многих книгах, в том числе и в своем учебнике геометрии.

Посмотрите в тетради. Та группа, которая увидела за равнобедренным треугольником пирамиду и верно изобразила ее в тетради, получает жетон за правильное решение задачи. А те группы, которые поняли, что за треугольником может прятаться и другое тело, и нарисовали это тело правильно, получают по два жетона.

Рис. 109

Глядя на пирамиду с некоторого расстояния, мы видели треугольник — одну из четырех ее боковых граней. Поэтому изобразить эту пирамиду можно равнобедренным треугольником. Можно ли изобразить ее в виде разностороннего треугольника? ... Конечно, достаточно подойти поближе к пирамиде и отойти немного в сторону, но так, чтобы нам была видна только одна грань пирамиды.

Нарисуйте в тетрадях еще какие-нибудь изображения четырехугольной пирамиды, обменяйтесь рисунками и проверьте их.

Среди ваших изображений есть такие, на которых четырехугольная пирамида имеет разное число видимых граней. Подойдите к ней так, чтобы вы видели только одну, две, три грани.

Можно ли изобразить четырехугольную пирамиду так, чтобы видимыми у нее были четыре грани? ... Можно. Среди ваших рисунков есть и квадрат, в котором противоположные вершины соединены отрезками. В этом случае невидимой гранью является лишь основание пирамиды. Откуда нужно посмотреть на нашу пирамиду, чтобы таким образом увидеть ее, и возможно ли это сделать? ... Если бы мы могли подняться на небольшую высоту над вершиной пирамиды и посмотреть на пирамиду сверху, мы увидели бы квадрат (стороны основания) и его диагонали (при этом противоположные боковые ребра мы видели бы лежащими на одной прямой).

Мы рассмотрели изображение четырехугольной пирамиды, когда видимыми являлись четыре боковые грани. Можно ли посмотреть на пирамиду так, чтобы видимыми были четыре грани, среди которых одна — основание?

Наша экскурсия подходит к концу. Сейчас мы пройдем вдоль Большого озера к Адмиралтейству, где сможем увидеть еще раз все рассмотренные нами архитектурные сооружения Екатерининского парка.

Остановка 8. У Адмиралтейства

Мы подошли к Адмиралтейству. Посмотрите, как прекрасен этот уголок парка, созданный природой и мастерски украшенный рукою человека! Насколько гармонично растворяются в окружающем пейзаже величественные и такие разные по своему стилю творения талантливых архитекторов XVIII века! Как тонко чувствовали они красоту и единство мира, создавая свои шедевры!

Это последняя наша остановка, после чего мы постараемся ответить на все возникшие у нас вопросы и подвести итоги экскурсии.

Издали нам видна лестница, ведущая на Камеронову галерею. Ваши предположения оказались правильными, два ее нижних пролета действительно видны прямоугольниками.

Посмотрите еще раз на окно Птичника. Стоя на противоположном берегу озера, на вопрос: «Какую форму имеет окно?» — вы ответили: «Форму круга». Подойдите к корпусу ближе и рассмотрите внимательнее это окно.

Можно заметить, что окно имеет форму сплющенной окружности: сверху немного вытянутой, снизу немного втянутой. Как вы считаете, можно ли на боковой поверхности прямого кругового цилиндра нарисовать окружность? ... Мнения разделились. Оказывается, это сделать невозможно. На боковой поверхности прямого кругового цилиндра может получиться плоская замкнутая линия только тогда, когда мы этот цилиндр разрежем плоскостью, причем, чтобы получить окружность, секущая плоскость должна быть перпендикулярной отрезкам, образующим боковую поверхность цилиндра.

Подведем итоги нашей экскурсии.

Сегодня мы обобщили знания, приобретенные на уроках геометрии в этом учебном году.

Обратив внимание лишь на внешние проявления геометрии в архитектуре (формы здания и его отдельных деталей, их сочетание и взаимосвязь) и садово-парковом искусстве, по-видимому, вы почувствовали, что без знания законов геометрии архитектор и садовник не смогли бы создать свои творения. Недаром говорят, что «геометрия — грамматика архитектора».

Запишите домашнее задание: нарисовать какой-нибудь элемент (деталь) одного из парковых сооружений, посмотрев на который можно было бы узнать, какой памятник архитектуры вы имели в виду. Например, в павильоне «Грот» таким элементом может являться колонна, составленная из цилиндров разных размеров. По вашим рисункам на следующем уроке мы вспомним основные этапы экскурсии по Екатерининскому парку (ее геометрическую сторону).

Наша экскурсия, посвященная геометрическим формам в архитектуре, подошла к концу. Определим лучшую команду и выставим оценки отличившимся игрокам.

6.3. Экскурсия по теме «*Симметрия в архитектуре*» (исторический центр Санкт-Петербурга)

Экскурсия проводится в конце изучения темы «Симметрия фигур».

Остановка 1. Невский проспект. Канал Грибоедова

Наша экскурсия посвящена симметрии в архитектуре. На уроках геометрии мы с вами изучали симметрию, говорили о ее различных видах. Сегодня мы, рассматривая архитектуру нашего города, попытаемся почувствовать совершенство зданий, в которых заложена симметрия. Мы увидим храм Воскресения Христова, ансамбль Стрелки Васильевского острова, остановимся на Итальянском мосту, рассмотрим ажурное кружево решеток и оград Петербурга.

Давайте пройдем вдоль канала Грибоедова к первому архитектурному сооружению, которое рассмотрим с точки зрения симметрии.

Остановка 2. У Итальянского моста

Мы находимся в центре нашего города, на набережной канала Грибоедова. Раньше этот канал назывался Екатерининским, теперь он носит имя известного русского писателя Александра Сергеевича Грибоедова.

Позади нас остался Невский проспект — главная магистраль нашего города, впереди — храм Воскресения Христова, справа — Итальянская улица.

Итальянская улица получила название от Итальянского дворца, когда-то просматривавшегося в ее перспективе. Дворца давно нет, однако улица сохранила свое название. Так называется и пешеходный мост, находящийся немного впереди нас (рис. 110).

Первый деревянный мост появился здесь в конце XIX века.

Итальянский мост, который мы видим сейчас, был спроектирован инженером А. Д. Гутцайтом и архитектором В. С. Васильковским в 1955 году. Как изящны и легки его формы, насколько красивы его фонарики!

Рис. 110

Рис. 111

Эту легкость восприятия моста создает и заложенная в нем математика: верное сочетание геометрических форм, математические законы, по которым созданы эти формы, правильность математических расчетов.

Фонарный столб, украшающий мостик, состоит из множества симметричных элементов (рис. 111). Перечислите некоторые из них. ... Тумба столба представляет собой прямой круговой цилиндр, на верхнем основании которого стоят четыре прямоугольных параллелепипеда. Каждый из параллелепипедов завершается правильной четырехугольной пирамидой. Немного выше мы видим часть шара, сверху и снизу ограниченную двумя параллельными плоскостями и плавно переходящую в цилиндр. Основная часть фонарного столба представляет собой усеченный конус, заканчивающийся изящно изогнутой ветвью в виде спирали. Зацепившись за окружность — самую симметричную плоскую фигуру, на фонарном столбе висит фонарик.

Фонарик имеет форму правильной шестиугольной усеченной пирамиды.

Назовите элементы симметрии этих фигур.

Чтобы внимательнее разглядеть красоту и изящество элементов, составляющих фонарный столб, проведем игру.

Я задумываю одну из деталей моста и даю ей три характеристики. Ваша задача — отгадать ее. Итак:

1. Это многогранник.
2. Он имеет одну ось симметрии.
3. Его боковые грани — равнобедренные трапеции.

1. Это пространственная фигура.
2. У нее четыре плоскости симметрии.
3. Архитектурные сооружения с таким названием строили в Древнем Египте.

1. Это круглое тело.
2. Оно имеет одну ось симметрии.
3. В переводе с греческого оно означает «еловая шишка».

1. Это многогранник.
2. Он обладает поворотной симметрией 4-го порядка.
3. У него пять плоскостей симметрии.

Детали, украшающие фонарный столб: маски львов, растительный орнамент, не только радуют глаз, но и придают столбу новый геометрический оттенок. Назовите порядок возникших поворотных симметрий.

Насколько разнообразны геометрические фигуры, составляющие Итальянский мостик! Внимательно рассматривая его, лишний раз убеждаешься в правильности мысли о том, что «геометрия — грамматика архитектора». Эту мысль подтверждает и следующий объект нашей экскурсии. Он также имеет богатейшее математическое содержание.

В перспективе канала Грибоедова мы видим храм Воскресения Христова (рис. 112), построенный в конце XIX — начале XX века архитектором А. А. Парландом на месте гибели императора Александра II. Это трагическое событие дало храму второе название — Спас на Крови.

Является ли храм симметричным? ... Фасад храма, обращенный к нам, не симметричен — боковые купола расположены вокруг центрального по-разному: одни выше, другие ниже. А о симметричности или несимметричности сооружения говорить рано: мы видим лишь один его фасад.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, подойдем к Спасу на Крови, обойдем его и рассмотрим с разных точек зрения.

Рис. 112

Остановка 3. У храма Воскресения Христова

Мы находимся рядом с храмом Воскресения Христова, перед входом в Михайловский сад. Знаете, почему этот садик петербуржцы называют Михайловским? В начале XIX века здесь строился дворец для младшего брата Александра I — великого князя Михаила Павловича. Его именем и назван дворец (этот дворец сейчас более известен как Русский музей). Для дворца был отведен большой участок на территории обширного парка, который стал называться так же, как и дворец, Михайловским. Проект дворца было предложено сделать Карлу Ивановичу Росси. Росси не ограничивался созданием отдельных архитектурных сооружений, он создавал ансамбли! Занимаясь планировкой этого участка, К. Росси перед дворцом разбил огромную площадь (сейчас это площадь Искусств). Архитектор связал эту площадь с главной магистралью Петербурга — Невским проспектом — новой улицей, специально проложенной среди существовавшей тогда жилой застройки. Эта улица и поныне носит название Михайловской.

Но вернемся к теме нашей экскурсии. Посмотрите на храм Воскресения Христова.

С Итальянского мостика мы не видели симметрии в этом сооружении. Но чудо! Обойдя Спас на Крови, можно заметить, что его восточный и западный фасады обладают строгой зеркальной симметрией.

Храм Воскресения Христова украшен множеством деталей, которые оживляют и разнообразят его архитектуру. Они не повторяют друг друга, и это нарушает симметричность фасадов. Только не учитывая эти архитектурные элементы, можно говорить о симметричности западного и восточного фасадов храма.

Купола храма нас особенно завораживают! Издали кажется, будто они прорезаны разноцветными полосами. Подойдя ближе, мы видим, что такой рисунок создают украшающие их «пирамиды».

Обходя храм, не перестаешь удивляться возникновению его новых видов. Находясь у южного фасада, мы видим, что купола хаотично разбросаны. На восточном фасаде неожиданно для нас купола образуют строгую последовательность, при этом выделяется главный купол. Мы подходим к северному фасаду — купола снова хаотично разбросаны.

Каждый из куполов очаровывает нас своей неповторимостью. Найдите различия в их отделке (рис. 112). ... Один из куполов усеян «пирамидами» так, что издали кажется, будто на нем нарисована разноцветная витая линия. На симметричном ему куполе «пирамиды» образуют причудливые полосы, похожие на меридианы. Другой купол

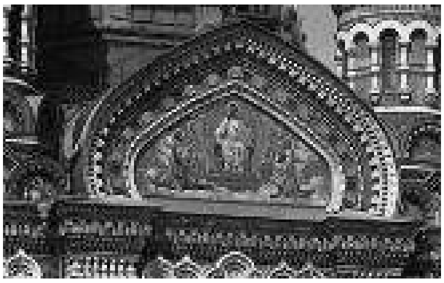


Рис. 113

Рис. 114

оформлен чередующимися в определенном порядке «пирамидами». Ищем купол, симметричный ему... На нем отчетливо видны кресты. Даже неукрашенные купола пронизаны линиями, напоминающими параллели и меридианы на глобусе.

Какой необыкновенной фантазией, каким богатым воображением нужно обладать архитектору, чтобы создать подобную красоту!

Подберите как можно больше эпитетов, которые описывали бы изящество и совершенство храма Воскресения Христова.

Перейдем теперь к южному фасаду храма.

До сих пор мы говорили о *зеркальной* симметрии Спаса на Крови. В богатом декоре храма есть элементы, которые обладают и другими видами симметрии. Назовите их. ... Фриз Спаса на Крови украшен множеством одинаковых архитектурных элементов (рис. 113). Мысленно бесконечно продолженная эта часть храма, обладает *переносной* симметрией.

Купола храма наводят нас на мысль о *поворотной* симметрии. Рассмотрим главный купол Спаса на Крови с этой точки зрения (рис. 114).

1. Луковичная главка покоится на небольшом барабане, который имеет 8-й порядок поворотной симметрии.
2. Восьмигранный шатер, прорезанный слуховыми окнами, также обладает поворотной симметрией 8-го порядка.
3. Шатер опоясывают два яруса кокошников. Количество этих декоративных деталей в обоих ярусах неодинаково (сверху мы можем насчитать 8 кокошников,

снизу — 16). Но из-за их расположения вокруг шатровой части порядок поворотной симметрии не изменился: он равен восьми.

4. Немного ниже мы видим 8 арочных проемов. Они также создают в этой части храма поворотную симметрию 8-го порядка.

Можно рассмотреть поворотную симметрию колокольни и остальных луковичных главок (см. рис. 112).

Рис. 115

Вход в храм и выход из него завершены шатром — правильной пирамидой, фигурой, обладающей поворотной симметрией (рис. 115). Каков порядок этой симметрии? ... Он равен шести.

Верхняя часть шатра увенчана двуглавым орлом. Именно двуглавый орел — символ силы и могущества страны — изображен на гербе России.

Рассмотрим подробнее этот элемент архитектуры храма.

Вы знаете, что предметы можно видеть по-разному в зависимости от того, как на них смотреть. Понаблюдаем за изменением вида орла с разных позиций.

Приближаясь к храму и пытаясь его обойти, мы увидели еще одно крыло орла, которое издали сливается с двумя другими. Оказывается, форма орла сложнее, чем кажется первоначально.

Что представляет собой этот архитектурный элемент с геометрической точки зрения? На поставленный вопрос мы смогли бы ответить, если бы посмотрели на него сверху или снизу. В таком случае мы увидели бы, что орел трехглавый и трехкрылый. Третье его крыло постоянно прячется за другие два или сливается с ними. Поэтому, рассматривая его с разных точек зрения, мы и воспринимаем его как двуглавого орла.

Это было очень важно: символ власти должен быть виден со всех сторон так, как положено. Кстати, таких трехглавых орлов можно увидеть и на Дворцовой площади, на ограде, построенной вокруг Александрийского столпа (рис. 116).

Обладает ли этот архитектурный элемент какой-нибудь симметрией? ... Он обладает поворотной симметрией

Рис. 116

3-го порядка, так как существует три различных поворота вокруг одной оси, при которых вся фигура переходит в себя.

Заметим, что трехглавый орел — один из немногих архитектурных элементов, имеющих нечетный порядок поворотной симметрии.

В качестве домашнего задания вам будет нужно найти в городе сооружения, имеющие поворотную симметрию нечетного порядка.

Мы подробно рассмотрели многие детали храма Воскресения Христова. Для проверки вашей наблюдательности проведем игру. Игра заключается в следующем.

Один из вас загадывает архитектурный элемент храма. Остальные ребята с помощью наводящих вопросов (на которые можно ответить либо да, либо нет) отгадывают этот элемент.

Например, задуман некоторый фрагмент храма. Какие вопросы вы можете задать?

Этот элемент находится на восточном фасаде храма? — Нет.

Рис. 117

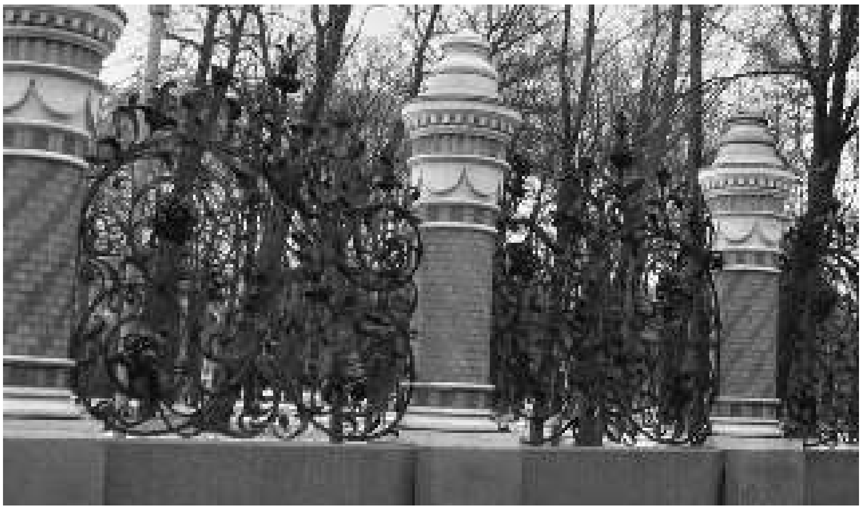


Рис. 118

Этот элемент имеет форму пирамиды? — Нет.
Он обладает симметрией? — Да.
Он обладает переносной симметрией? — Нет.
Это мозаичное украшение? — Нет.
И т. д.

Посмотрим с геометрической точки зрения на решетку и ограду, расположенные рядом с храмом.

В решетке набережной канала Грибоедова (рис. 117) многократно повторяется один и тот же элемент. При его мысленном бесконечном продолжении эта решетка обладала бы *переносной* симметрией.

Решетка также обладает и *осевой* симметрией. Покажите, где проходит ее ось.

Обладает ли решетка зеркальной симметрией? ... Конечно. Любая плоская фигура, имеющая ось симметрии, лежащую в плоскости этой фигуры, зеркально симметрична. Как расположена плоскость симметрии этой решетки?

Ограда Михайловского сада (рис. 118) значительно разнообразнее и сложнее по своей геометрии, чем решетка набережной канала Грибоедова. Известно, что она была создана по проекту А. А. Парланда, архитектора храма Спаса на Крови.

Симметрична ли эта ограда? ... Рисунок чугунного кружева ограды через каждые два пролета повторяется. При его мысленном бесконечном продолжении можно утверждать, что ограда обладает переносной симметрией.

Рис. 119

Интересно, что часть ограды, составляющая один ее пролет, никакой симметрией не обладает (рис. 119). Тем не менее ее рисунок завораживает сложностью и изяществом.

Мы искали различные виды симметрии в архитектурных сооружениях Петербурга. Оказывается, в нашем городе есть уголки, красоту которых составляет не только симметрия, созданная руками человека, но и природная симметрия. В завершение экскурсии полюбуемся шедевром архитектуры, умелой рукой зодчего вплетенным в окружающий пейзаж.

Остановка 4. На Дворцовой набережной, у Троицкого моста

Мы подошли к Троицкому мосту, построенному к 200-летию Петербурга в 1903 году.

Посмотрите налево, туда, где Нева разделяется на два рукава, симметрично растекающиеся в разные стороны. Издавна узкие и длинные выступы суши назывались стрелками. Получила название Стрелки и эта оконечность Васильевского острова (рис. 120).

Стрелка Васильевского острова очень выгодное месторасположение для создания архитектурного ансамбля. Нева в этом месте особенно красива и широка... В градостроительстве Петербурга река играет определяющую роль.

Рис. 120

Рис. 121

Разделяясь у Стрелки Васильевского острова на два мощных протока, Нева сама подсказывает идею симметрии.

Перед создателями ансамбля стояла нелегкая задача, ведь для полной гармонии природы и архитектуры нужно тонко чувствовать все особенности природного ландшафта.

Архитектору Тома де Томону удалось справиться с этой задачей. Он сумел подчеркнуть красоту этого места и соединить в одно целое архитектуру с окружающим пейзажем. Так образовалось одно из прекраснейших мест Петербурга.

В центре ансамбля Тома де Томон поставил здание Биржи (рис. 121). Торжественная закладка Биржи состоялась 23 июня 1805 года. Первоначально здание предназначалось для заключения торговых сделок между русскими и иностранными купцами.

Какие приемы использовал архитектор, чтобы подчеркнуть главенствующую роль Биржи в ансамбле Стрелки Васильевского острова? ... Здание поставлено на небольшое возвышение: так оно кажется торжественнее. Окруженное белыми колоннами, оно словно парит в пространстве, создавая ощущение легкости.

Тома де Томон придавал большое значение площади перед зданием Биржи. Для ее создания берег был насыпан, выровнен и выдвинут вперед на сто метров.

Рис. 122

Образованная полукруглая площадь усиливает симметричность панорамы Стрелки Васильевского острова.

Назовите другие элементы ансамбля, характеризующие Биржу как его ярко выраженный центр. ... Две Ростральные колонны на площади (рис. 122).

Ростральные колонны возводились как памятники в честь морских побед или как символ морского могущества страны. На Стрелке Васильевского острова они должны были служить маяками и вместе с тем подчеркивать значение биржевого здания как центра Петербургского порта.

Симметричность панорамы Стрелки Васильевского острова усиливают два здания по обе стороны Биржи. Это *пакгаузы*, они были построены в 1826—1832 годах по проекту И. Ф. Лукини. Первоначально они возводились как склады для товаров (нем. *packen* — упаковывать, *Haus* — дом). Сейчас в южном пакгаузе размещается Зоологический музей, в северном — Центральный музей почвоведения им. В. В. Докучаева.

Почти симметрично относительно Биржи расположены две башни.

Слева мы видим башню Кунсткамеры, справа башню бывшей Таможни, также построенную под руководством И. Ф. Лукини в начале 1830-х годов (в настоящее время это Пушкинский дом).

Таким образом, через два десятилетия после строительства Биржи ансамбль Стрелки обрел свое логическое завершение.

Ансамбль Стрелки Васильевского острова — вершина творчества Тома де Томона, символ красоты, гармонии, симметрии в архитектуре. Ансамбль Стрелки называют также одним из символов нашего города.

Подберите наиболее точные слова, которые характеризуют этот вид.

Сегодня мы видели ансамбль Стрелки Васильевского острова с некоторого расстояния и познакомились с ним в общих чертах. В качестве домашнего задания вам будет нужно более детально рассмотреть с геометрической точки зрения ансамбль Стрелки (или только здание Биржи).

Мы убедились в том, что симметрия широко распространена в окружающем мире. В каждом архитектурном сооружении нам удавалось найти симметричные элементы. Как вы думаете, почему?

Может быть, дело в том, что человек в своих произведениях отражает окружающий его мир. Природой создано много симметричных форм. Поэтому для своих творений архитектор тоже выбирает симметричные формы.

Надеюсь, эта экскурсия заставит вас задуматься о роли симметрии в архитектуре и жизни.

Запишите *домашнее задание*:

1. Найдите в городе сооружения, имеющие поворотную симметрию нечетного порядка.
2. Наиболее подробно опишите с геометрической точки зрения ансамбль Стрелки Васильевского острова (или здание Биржи).
3. Нарисуйте план Стрелки Васильевского острова.

6.4. Урок-экскурсия *«Геометрия в архитектуре Казанского собора»*

Предлагаемый урок является обобщающим по теме «Симметрия фигур».

Урок проводится в классе. Используются фото- и видеоматериалы с изображением Казанского собора и его частей.

На доске заранее написаны новые для учащихся слова: фронтон, пилястра, каннелюры с их изображениями; висит портрет А. Н. Воронихина (1759—1814) (рис. 123).

Рис. 123

Тема нашего урока — «Геометрия в архитектуре Казанского собора».

Мы изучали виды симметрии фигур, говорили о симметричности различных геометрических фигур. Сегодня мы рассмотрим одно из архитектурных сооружений Петербурга. Особое внимание при этом мы обратим на геометрические формы в его архитектуре и на симметричность этих форм.

Демонстрация изображения северного фасада Казанского собора и Казанской площади (рис. 124).

Мы видим Казанский собор — главное творение русского архитектора Андрея Никифоровича Воронихина, созданное им в 1801—1811 годах.

Наше внимание привлекает мощная колоннада, придающая собору особую торжественность. Впечатление торжественности усиливают памятники двум полководцам, героям Отечественной войны 1812 года: М. И. Кутузову и М. Б. Барклаю-де-Толли, установленные в 1830-х гг. по проектам архитектора В. П. Стасова и скульптора Б. И. Орловского. Они установлены здесь не случайно.

Рис. 124

Казанский собор исторически стал памятником русской воинской славы. Здесь находятся почетные трофеи войны с Наполеоном: вражеские знамена, ключи от городов, взятых русской армией. Из Казанского собора после торжественного молебна М. И. Кутузов отправился на Отечественную войну 1812 года. Спустя год, сюда же было привезено тело М. И. Кутузова. Так триумфальный характер здания был подсказан самой эпохой.

Рассмотрим собор с геометрической точки зрения. Скажите, имеет ли храм элементы симметрии? ... Да, северный фасад Казанского собора зеркально симметричен: его правая часть точь-в-точь повторяет левую.

Вспомним, в переводе с греческого языка *симметрия* означает *соразмерность*, т. е. наличие в предмете равных частей, одинаково расположенных друг по отношению к другу. Это мы и наблюдаем в здании Казанского собора.

Мысленно проведите плоскость симметрии северного фасада Казанского собора. Покажите ее на изображении. Эта плоскость разделяет собор на две части, одна из которых как бы зеркально отражает другую и проходит далее через фонтан на Казанской площади.

Назовите детали, симметричные друг другу относительно представленной нами плоскости. ... Памятники, находящиеся слева и справа на площади; симметрично посаженные на ней деревья. Можно сказать, что и сама Казанская площадь зеркально симметрична.

Симметричен ли собор в целом относительно представленной нами плоскости? ... Мы не можем ответить на этот вопрос, потому что видим только один из фасадов храма. Чтобы найти ответ, нужно рассмотреть собор со всех сторон. На что следует обратить особое внимание при осмотре а

б

в

Рис. 125

Рис. 126

фасадов собора? ... Нужно сравнить левый (восточный) и правый (западный) фасады. Если они одинаковы, а южный фасад тоже обладает симметрией, то можно говорить о симметричности Казанского собора в целом.

Последовательно показываются и сравниваются изображения западного (рис. 125, *а*), *южного* (рис. 125, *б*) *и восточного* (рис. 125, *в*) *фасадов Казанского собора*.

Мы рассмотрели собор со всех сторон. Теперь мы можем ответить на вопрос: симметрично ли это архитектурное сооружение в целом? Нет, если бы Казанский собор был симметричным, на его южном фасаде мы увидели бы колоннаду, подобную колоннаде северного фасада.

Работая над проектом собора, А. Н. Воронихин видел его иначе. *Показ первоначального плана Казанского собора* (рис. 126).

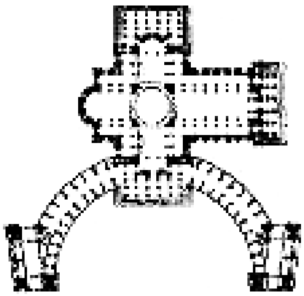


Рис. 127

Посмотрите на первоначальный план этого храма: его южный фасад должна была украшать такая же колоннада, как и северный. В этом случае собор имел бы плоскость симметрии, проходящую с запада на восток.

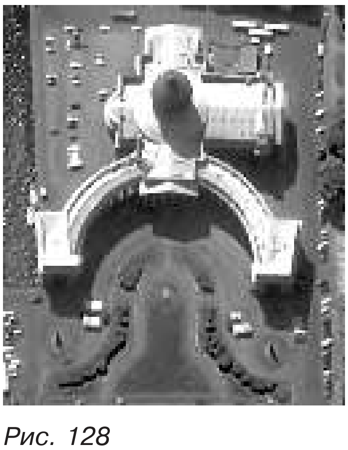


Рис. 128

Война 1812 года помешала осуществлению этого проекта. Вскоре после ее окончания умер руководитель строительства собора барон А. С. Строганов, умер и сам архитектор. Однако и в существующем виде собор является выдающимся памятником архитектуры Петербурга.

Может быть, Казанский собор симметричен относительно другой плоскости, например проходящей с севера на юг? Нет. На плане (рис. 127) мы видим: западный фасад храма плоский, часть восточного представляет собой модель прямого кругового цилиндра. Назвать собор симметричным в целом нельзя.

Оказывается, наш вывод и о симметричности северного фасада ошибочен. Симметричной является только колоннада — та часть собора, которую мы увидели. На плане очень хорошо видно: колоннада, закрывающая собой почти всю нижнюю часть северного фасада собора скрывает его несимметричность.

Для ответа на вопрос о симметричности здания нам помог план Казанского собора. Это же можно было бы увидеть и с вертолета.

Рис. 129

Демонстрация фотографии Казанского собора с высоты птичьего полета (рис. 128).

До сих пор нас интересовали общие виды фасадов Казанского собора. Рассмотрим храм более детально и ответим на вопрос: насколько симметричны геометрические формы, использованные в его архитектуре?

Вам нужно будет сделать некоторые чертежи. Поэтому откройте тетради, приготовьте карандаши.

Демонстрация изображения центральной части северного фасада Казанского собора (рис. 129).

Назовите геометрические фигуры, которые использовал архитектор при создании центральной части храма. ... Колонны портика, являющиеся моделью усеченных конусов, держат на себе фронтон. Мы смотрим на него с торца, поэтому он кажется нам треугольной формы. На самом деле фронтон представляет собой основание треугольной призмы, а двускатная крыша портика, ограничивающая фронтон, является частью боковой поверхности этой призмы.

Демонстрация изображения колонны портика (рис. 130).

Обратите внимание на то, что колонны портика украшены вертикальными желобками — ***каннелюрами***. Усеченные конусы, форму которых имеют колонны, очень своеобразны. Нарисуйте основания этих конусов.

Какие еще геометрические фигуры составляют центральную часть храма? ... Барабан купола представляет собой цилиндр.

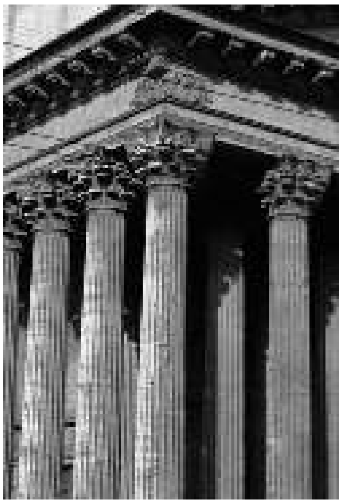


Рис. 130

Посмотрите на фотографию собора, сделанную с вертолета (см. рис. 128). Вы видите, что опорой барабана является конструкция из семи цилиндров, стоящих друг на друге так, что основание каждого следующего цилиндра — круг меньшего радиуса.

Нарисуйте вид сверху этой конструкции из цилиндров. Что вы получили? ... Концентрические круги.

Вернемся к изображению центральной части северного фасада Казанского собора. Покажите на изображении Казанского собора детали, имеющие форму четырехугольной усеченной пирамиды. ... Это колонны, приставленные к барабану купола (рис. 131). Такие колонны в архитектуре называют ***пилястрами***.

Прямоугольные оконные проемы и пилястры придают барабану купола определенный ритм, который подчеркивается кругами, расположенными немного выше.

Оконные проемы напоминают нам прямоугольники. Однако, используя эту фотографию, мы не можем правильно определить их форму. Поэтому попробуем поразмышлять.

Рис. 131

Две противоположные стороны оконного проема лежат на образующих цилиндрической поверхности: они прямолинейны; две другие не могут быть прямолинейны, они являются дугами окружностей, параллельных границам оснований цилиндра: это — кривые линии.

Таким образом, оконный проем на барабане купола представляет собой пространственную фигуру. Это не прямоугольник, а цилиндрическая поверхность, направляющей которой является дуга окружности. Нарисуйте в тетрадях эту фигуру.

Объясните, почему пилястры, украшающие барабан купола, не являются четырехугольными усеченными пирамидами. ... Пилястры приставлены к барабану купола, имеющему форму цилиндрической поверхности. Поэтому боковая поверхность пилястры состоит из трех трапеций и одного криволинейного четырехугольника. Это не усеченная пирамида, а усеченный конус, основания которого — сложные геометрические фигуры.

Нарисуйте эти основания.

Совсем другую геометрическую форму имеют пилястры, украшающие колоннаду.

Демонстрация изображения одного из порталов, завершающих колоннаду (рис. 132).

Рис. 132

Эти пилястры приставлены к плоской поверхности. Верно ли, что они являются моделью четырехугольных усеченных пирамид? ... Пилястры украшены каннелюрами. Поэтому нельзя считать их пирамидами. Это конусы с более сложными основаниями. Нарисуйте в тетрадях основания этих каннелюрованных пилястр.

Вновь обратите внимание на барабан купола Казанского собора. Благодаря оконным проемам и пилястрам он обладает поворотной симметрией конечного порядка. Посчитайте его. ... Порядок поворотной симметрии барабана купола равен 16, так как существует 16 различных поворотов вокруг оси, при которых барабан купола может сам с собой совместиться.

В верхней части храма мы видим купол в форме полусферы. Его украшают линии, напоминающие меридианы. Порядок поворотной симметрии купола тоже равен 16.

Купол венчает шар — самая симметричная пространственная фигура.

Вы сумели перечислить многие геометрические фигуры в архитектуре храма. Обратите внимание на то, что формы, замеченные вами, обладают различными видами симметрий. Это усиливает ощущение симметричности северного фасада собора.

Демонстрация изображения северного фасада Казанского собора (см. рис. 124).

Урок мы закончим игрой. Я задумываю архитектурный элемент Казанского собора и называю, какими видами симметрии он обладает. Ваша задача отгадать его.

Итак, этот элемент храма:

— имеет 17 плоскостей симметрии, 17 осей симметрии и поворотную симметрию 16-го порядка;

— бесконечно много плоскостей симметрии, бесконечно много осей симметрии и является поверхностью вращения;

— имеет две плоскости симметрии и не обладает поворотной симметрией.

Запишите *домашнее задание*: схематически изобразить северный фасад Казанского собора (или его часть). Особое внимание при выполнении задания обратите на правильное изображение геометрических фигур.

* * *

Создание учебника «Математика. Наглядная геометрия» оказалось возможным благодаря заинтересованному содействию учителей С.-Петербурга Л. П. Евстафьевой, А. Н. Болотинской, Ю. А. Мамаджановой, С. В. Сафроновой, В. Л. Велиховской, О. А. Исаковой, Н. А. Кайсиной, М. В. Емельяненко, Т. М. Матраховой, студентов факультета математики РГПУ им. А. И. Герцена С. Андреевой, Ю. Сафоновой, М. Смирновой и др. Авторы благодарят А. Л. Вернера, В. П. Горенбурга, Т. Н. Лейкину, С. А. Франгулова за внимательное прочтение рукописи учебника и весьма полезные советы.

Содержание

Учебное издание

Ходот Татьяна Георгиевна
Ходот Александр Юрьевич
Дмитриева Ольга Анатольевна

Математика

Наглядная геометрия

5—6 классы

Методические рекомендации к предметной линии учебников Т. Г. Ходот и др.

Центр математики

Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Подписано в печать 21.02.23. Формат $60 \times 90\,{}^1/_{16}$. Бумага газетная.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 7,20. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 127473, г. Москва,

ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru.**