Е.Г. Ситникова, учитель математики
МАОУ лицей № 17 г. Калининград

Развитие у учащихся 10 – 11 классов физико-математического профиля пространственного воображения на практических занятиях по геометрии

Особенность геометрии, выделяющая её не только среди математических дисциплин, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика доказательства соединена с наглядным представлением. Геометрия – это соединение живого воображения и строгой логики рассуждений, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга. Воображение даёт непосредственно видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика, в свою очередь, придаёт точность воображения и направляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логике связи.

Одной из важнейших целей уроков геометрии, и в частности стереометрии, является развитие геометрического видения, отработка умений школьников создавать мысленный образ некоторого геометрического объекта, видеть в реальных ситуациях изученные теоретические положения.

Как показывает опыт, ошибки, допускаемые учащимися в процессе решения стереометрических задач, в большинстве случаев связаны с неумением правильно определить взаимное расположение элементов, возникающих в них фигур, т.е. неверным пониманием геометрической ситуации, заданной условием задачи.Многие ошибки учащихся обусловлены неправильным изображением основания высоты относительно основания пирамиды или призмы. Это приводит к неправильному определению угла наклона бокового ребра к плоскости основания, к ошибкам при построении линейного угла двугранного угла и т.д.Избежать подобных затруднений можно, целенаправленно рассматривая на уроках наиболее часто встречающиеся геометрические ситуации с последующим решением связанных с ними задач.

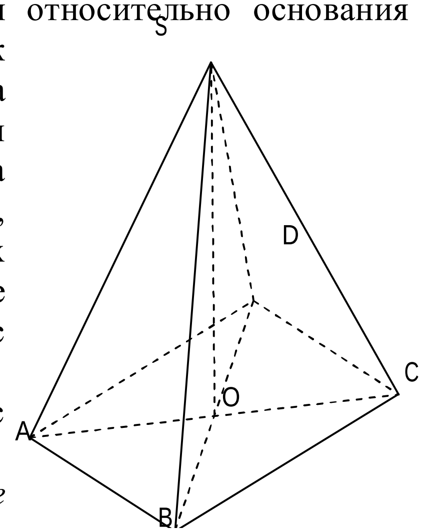

Рис. 1

Приведем несколько примероработы с учащимися по пропедевтике таких ошибок.

1. *Боковые рёбра пирамиды равны. Какие свойства геометрической ситуации определяются этим условием* (Рис. 1)?

Вопрос о возможных следствиях из условия этой задачи обсуждаются коллективно. В результате приходим к следующему списку:

а) боковые рёбра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды;

б) боковые рёбра образуют равные углы с высотой пирамиды;

в) проекции боковых рёбер на плоскость основания равны;

г) около основания пирамиды можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Можно рассмотреть вопрос об эквивалентности предложений а) – г) условию задачи. Доказательство этого факта обычно не вызывают у учащихся затруднений (оно опирается на равенство прямоугольных треугольников ASO, BSO и т.д.).

2. *Боковые грани треугольной пирамиды SABC образуют с плоскостью основания ABC равные углы*(Рис. 2).

Учащиеся без труда замечают, что условию данной задачи удовлетворяет пирамида, вершина которой проектируется в центр окружности, вписанной в её основание, но затрудняются без помощи учителя обнаружить ещё три пирамиды, удовлетворяющие условию задачи.

Основанием высоты пирамиды служит точка, равноудалённая от прямых AB, AC и BC, то есть центр окружности, вписанной в ABC или одной из вневписанных окружностей. Поэтому условию задачи удовлетворяют четыре пирамиды.

3. *В пирамиде SABCD фигура ABCD – квадрат, ребро SA перпендикулярно плоскости основания (Рис. 2).*

Проанализировав условие задачи, можно отметить следующие свойства данной геометрической ситуации:

а) AD⊥(SAB); BC⊥(SAB); AB⊥(SAD); CD⊥(SAD);

б) SD⊥CD;

в) SB⊥BC;

г) (SAB)⊥(ABC);

д) (SAD)⊥(ABC);

е) ΔSAB=Δ SAD;

ж) ΔSDC=ΔSBC;

з) все боковые грани – прямоугольные треугольники.

Свойства а) – з) без труда доказываются учащимися. Свойство а) доказывают, применяя признак перпендикулярности прямой и плоскости; свойства б), в) – по теореме о трёх перпендикулярах; г) и д) – по признаку перпендикулярности плоскостей; е) и ж) – по признакам равенства прямоугольных треугольников.

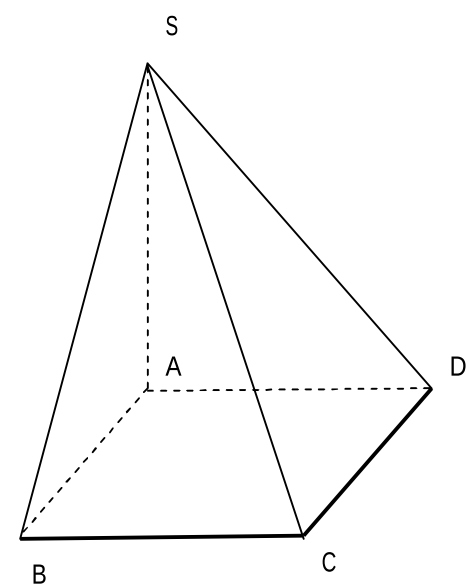

Рис. 2

4. *Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ABCD – ромб, боковое ребро AA_1 одинаково наклонено к прилежащим*сторонам

основания (Рис. 3).

Условия задачи определяют следующие свойства:

а) расстояние от точки A_1 до прямых AB и AD равны ($A_1P=A_1Q$);

б) грани A_1B_1BA и A_1D_1DAодинаково наклонены к плоскости основания;

в) $\Delta A_1AP=\Delta A_1AQ$;

г) $\Delta AMP=\Delta AMQ$ (M – ортогональная проекция точки A_1 на плоскость основания);

д) $M \in AC$;

Для того, чтобы отработать умение ориентироваться в различных геометрических ситуациях, можно предложить учащимся задачи со списком возможных ответов. Приведу пример такой задачи.

Какая точка плоскости ABC является основанием высоты пирамиды SABC, если:

1) боковые рёбра равны;
2) боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания;
3) боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы;
4) плоские углы при вершине S – прямые;
5) две пары противоположных рёбер взаимно перпендикулярны;
6) боковые рёбра равны между собой и $\angle ASB = \angle ASC\ 60^0$, $\angle BSC = 90^0$;
7) $\angle ACB = 90^0$, $AC \perp BS$?

Возможные ответы:

а) точка пересечения медиан треугольника ABC;

б) точка пересечения его высот;

в) центр окружности, описанной около треугольника ABC;

г) центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

д) центр окружности, вписанной в треугольник ABC или одной из вневписанных;

е) середина отрезка BC;

ж) точка прямой BC.

Правильные ответы:

1) в; 2) в; 3) д; 4) б; 5) б; 6) е; 7) ж.

Рассмотрим подробнее ситуации 4 и 5 из этой задачи: в пирамиде SABC плоские углы при вершине S – прямые.

Чтобы убедиться, что в описанной ситуации основанием высоты пирамиды является точка пересечения высот треугольника ABC, полезно сформулировать следующее утверждение: высота SH треугольной пирамиды SABC пересекает высоту AD основания (или её продолжение), если

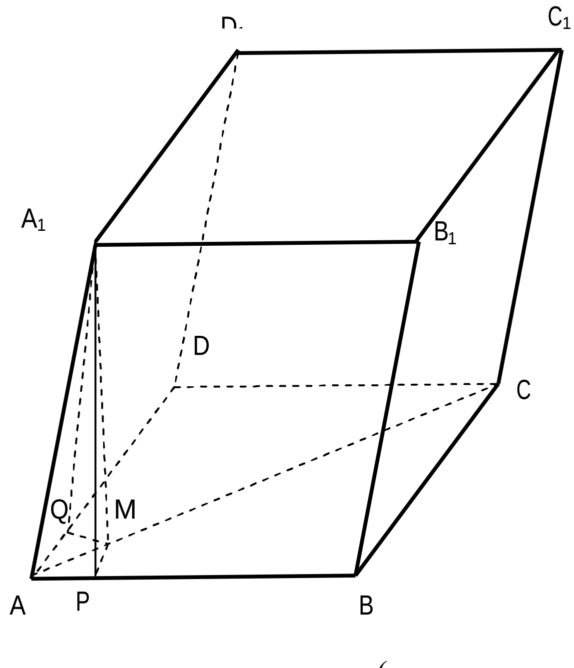

Рис. 3

SA⊥BC. Легко видеть, что это фактически иная формулировка теоремы о трёх перпендикулярах.

В описанной ситуации из того, что углы при вершине S – прямые, следует, что SC⊥(ASB), а значит, SC⊥ AB. Значит, высота пирамиды пересекает высоту треугольника ABC, проведённую из вершины C. Аналогично доказывается, что высота пирамиды пересекает высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A, т.е. проходит через ортоцентр треугольника ABC.

Полезно, оттолкнувшись от этой задачи, отдельно остановиться на доказательстве того факта, что основание перпендикуляра, проведённого из любой точки высоты пирамиды на боковую грань, принадлежит высоте этой боковой грани.

В ситуации 6 легко доказать равенство треугольников BCS и BAS. Следовательно, треугольник BAC – прямоугольный с прямым углом A. А поскольку боковые рёбра пирамиды равны, её вершины проектируются в центр окружности, описанной около треугольника ABC, который расположен в середине гипотенузы BC.

В ситуации 7 AC⊥(SBC), а значит, (SBC)⊥(ABC) и высота пирамиды лежит в плоскости (SBC).

Больший интерес вызывают задачи, в которых требуется сформулировать условие, достаточное для реализации определённой геометрической ситуации, или описать геометрическую фигуру, обладающую перечисленными свойствами.

Задачи, предложенные ниже, помогают сформировать навыки исследовательской работы, направить деятельность учащихся на исследование закономерностей, отработать умение делать логические выводы.

1. В пирамиде SABC углы наклона боковых рёбер к плоскости основания равны. При каком достаточном условии основание высоты пирамиды принадлежит треугольнику ABC?
2. В основании пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD (BC∥AD, BC<AD). Боковые рёбра пирамиды равны. При каком достаточном условии основание высоты пирамиды лежит вне трапеции ABCD?
3. а) При каком соотношении между радиусом основания конуса и его высотой угол при вершине осевого сечения конуса будет прямым (тупым, острым)? б) Какое из сечений конуса, проведённых через две образующих, имеет наибольшую площадь?
4. Боковые рёбра треугольной пирамиды равны. Может ли высота пирамиды быть в одной из её граней?
5. Боковые рёбра пирамиды равны. Может ли её основанием быть: а) прямоугольная трапеция; б) ромб?
6. Двугранные углы при основании пирамиды равны. Может ли её основанием быть: а) прямоугольная трапеция; б) ромб?
7. Две боковые грани четырёхугольной пирамиды перпендикулярны к плоскости основания. Как расположится высота пирамиды? Рассмотрите

разные случаи. Сделайте рисунки.

8. Можно ли через ребро тетраэдра провести плоскость, перпендикулярную противоположному ребру? Если можно, то при каких условиях?
9. Можно ли описать конус около четырёхугольной пирамиды, углы основания которой последовательно относятся как: а) 1:3:5:9; б) 3:4:6:5?
10. Можно ли около конуса описать пирамиду, в основании которой: а) ромб; б) прямоугольник; в) прямоугольная трапеция? Если можно, то при каких условиях?
11. Плоскость, проведённая через ось тела вращения, образует в сечении четырехугольник, диагонали которого 10 см и 12 см. Вычислите объём тела вращения.

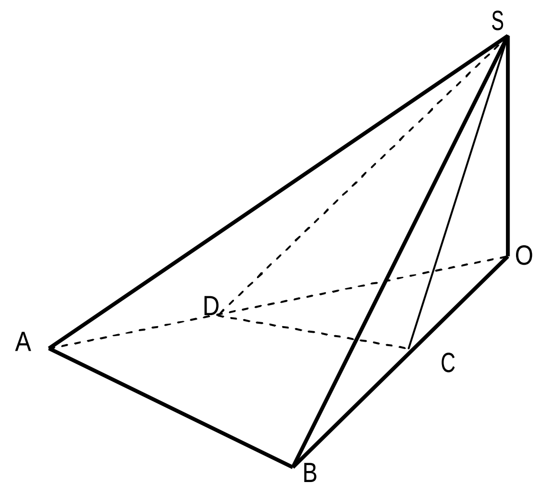

Рис. 4

Решение задач 4 и 5 основано на том, что в описанной ситуации основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, в которую вписывается основание пирамиды. В задаче 6 вершина должна проектироваться в центре вписанной окружности. В задаче 7 к плоскости основания могут быть перпендикулярны как две смежные (и тогда высота пирамиды совпадает с одним из боковых рёбер), так и две противоположные боковые грани. В последнем случае высота пирамиды находится вне её.

Условию задачи 11 удовлетворяет тело, полученное вращением дельтоида с диагоналями 10 см и 12 см вокруг одной из диагоналей.

Методические приёмы, выбранные для анализа условия задачи, должны быть подчинены в основном двум целям:

1) направить деятельность учащихся на исследование закономерностей между данными задачами;
2) отработать умение делать логические выводы из полученных результатов.

Вопросы, направляющие внимание учащихся на выявление закономерностей между данными задачами, ставятся так, что могут быть использованы учениками при решении других задач. Это помогает в дальнейшем избегать ошибок, связанных с анализом условия и в более сложных ситуациях.

Рассмотрим, например, такую задачу. *Основание четырёхугольной пирамиды – квадрат, все боковые грани – прямоугольные треугольники. Необходимо определить объём пирамиды, если её высота равна 1, а один из двугранных углов, образованных боковыми гранями, равен 120^0.*

Важно проанализировать условие задачи, чтобы выяснить особенности пирамиды. Увидеть эквивалентность формулировки этой задачи и формулировки задачи 3(I) учащимся непросто. Можно направить их, предложив последовательно разобрать все возможные случаи. Пусть условию задачи удовлетворяет пирамида SABCD, у которой основанием является квадрат ABCD, а боковые грани SAB, SBC, SCD и SAD – прямоугольные треугольники.

По условию, ΔSBC – прямоугольный. Пусть прямым в нём является угол, вершина которого лежит на основании пирамиды, например $\angle$SBC. Тогда SB$\perp$BC, AB$\perp$(ASB), а значит по признаку перпендикулярности плоскостей, (SAB)$\perp$(ABC).

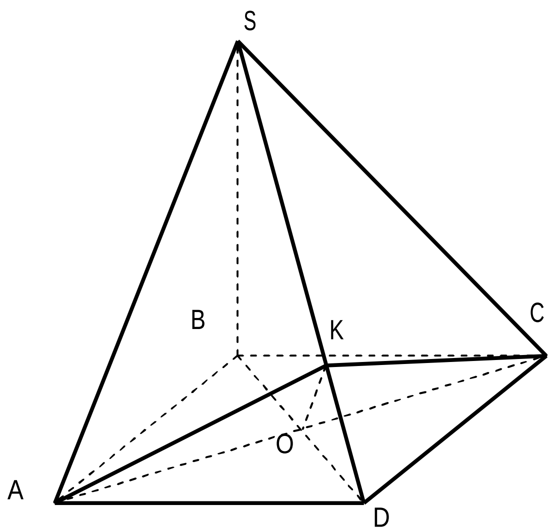

Рис. 5

По условию ΔSAB тоже прямоугольный. Как может сложиться ситуация? Учащиеся называют возможные варианты и сразу их анализируют.

а) $\angle$SBA = 90^0. Если $\angle$SBA = 90^0 и SB$\perp$BC, то SB$\perp$(ABC), т.е. боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания;

б) $\angle$SAB = 90^0, тогда SA$\perp$AB, а так как (SAB) $\perp$(ABC), то SA$\perp$(ABC).

Обязательно должен быть рассмотрен вопрос о возможности третьего случая:

в) $\angle$ASB = 90^0; но если все боковые грани – прямоугольные треугольники и в одной из боковых граней угол при вершине S прямой, то и во всех боковых гранях прямыми должны быть углы при вершине S, а это невозможно, т.к. сумма плоских углов при вершине оказалась бы равной 360^0.

Проанализировав таким образом условие задачи и выявив все свойства возникшей здесь ситуации, приходим к выводу: одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно плоскости основания. Рассмотрим пирамиду SABCD, у которой SB$\perp$(ABC). Предстоит ещё выяснить какой из углов, образованных боковыми гранями, может быть равен 120^0.

Учащиеся сразу же интуитивно выбирают угол при ребре SD. Но не стоит пренебрегать обоснованием этого, вообще говоря, очевидного факта.

Итак, основание пирамиды – квадрат ABCD, SB – её высота, SB=1. Как построить линейный угол двугранного угла при ребре SD? Вероятный ответ: провести через AC плоскость, перпендикулярную SD. А возможно ли это? Вопрос о возможности построения такой плоскости решался в задаче 8(II). $\angle$AKC = 120^0. Треугольники ASB, SBD, SAD, SCD, SBC – прямоугольные.

Ученики без труда замечают и доказывают попарное равенство треугольников ASB и SBC, ASD и SDC, а также равенство отрезков AK и KC и факт перпендикулярности OK и AC.

Как результат подробного анализа задачи, возникают различные способы нахождения объёма.

1. Используя подобие треугольников SBD и OKD и рассмотрев прямоугольные треугольники AKO и SBD, найти AB=1. И вычислить объём пирамиды, используя формулу $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн}.h = \frac{1}{3}$ (куб.ед.). Доказать, что SB = AD, можно используя равенство ΔSBD и ΔSAD.
2. Можно заметить, что пирамида SABCD является частью куба с основанием ABCD и ребром SB, а также, что куб состоит из трёх равных пирамид: SABCD, SCC_1D_1D и SAA_1D_1D. Следовательно, $V_{пир} = \frac{1}{3}V_{куба} = \frac{1}{3}$(куб.ед.).

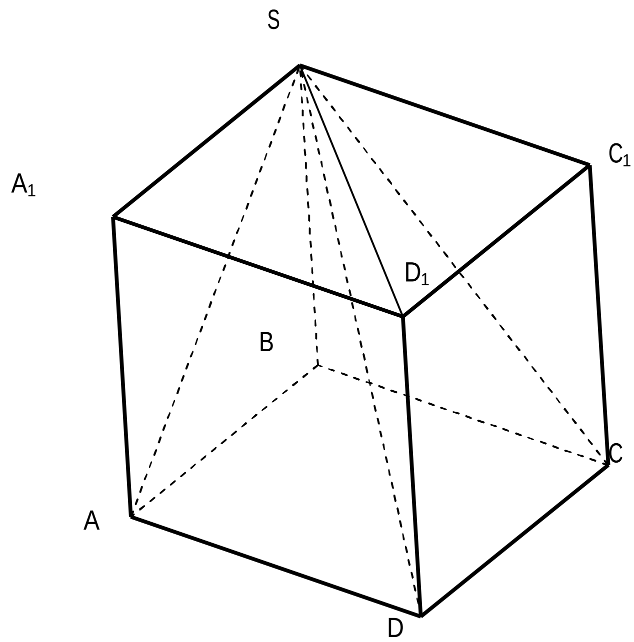

Рис. 6

Задачи, подобные перечисленным, не только создают определённый «банк геометрических ситуаций», что позволяет учащимся избежать ошибок в процессе решения задач, связанных с уже знакомыми ситуациями.Развивают геометрическое видение учащихся,логику мышления, вырабатывают привычку анализировать условие задачи, применять ранее изученную теорию.Решение подобных упражнений положительно влияет и на решение учащимися задач, связанных с другими геометрическими ситуациями, которые специально в классе не изучались.

Данный материал можно использовать в урочной и внеурочной деятельности, на факультативах и элективных курсах, в процессе индивидуальной работы с одарёнными детьми.

Список литературы

1. В.В. Фирсов.Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения. - М., 1994
2. А.А. Кирсанов. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема. Казань, 1982
3. Газета «Математика в школе», 2014-2015гг.
4. И.Э. Унт. Индивидуализация и дифференциация обучения. М., 1990
5. http://moi-

rang.ru/publ/metodicheskie_materialy/pedagogicheskie_tekhnologii/urovnevaja_differenciacija_obuchenija_na_osnove_objazatelnykh_rezultatov_v_v_firsov/12-1-0-56#.VqObalOqPkw

6. http://www.dissercat.com/content/tekhnologiya-obucheniya-uchashchikhsya-malochislennykh-klassov-resheniyu-zadach-po-fizike-v