

## Демонстрационный вариант

Работа состоит из двух частей, включающих в себя 8 заданий с развернутым ответом и задание на оценивание работ обучающихся.

На выполнение работы по математике отводится 120 минут.

При выполнении заданий 1-8 требуется записать полное решение и ответ.

При выполнении задания 9 необходимо изучить критерии оценивания заданий 17 и 18. Затем оценить выполнение указанных заданий обучающимся. Заполнить таблицу 1, проставив выставленный балл за выполнение задания обучающимся под соответствующим номером.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполнение заданий, суммируются.

### Задание 1.

27 выпускников школы поступили в технические вузы. Они составляют 30% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

### Задание 2.

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен  $60^\circ$ , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

### Задание 3.

В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 16 из Чехии, 17 из Словакии, остальные из Австрии. Порядок, в котором выступают гимнастки определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Австрии.

### Задание 4.

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

### Задание 5.

Найдите наибольшее значение функции  $y=8\ln(x+7) - 8x + 3$  на отрезке  $[-6,5; 0]$ .

### Задание 6.

Дано уравнение  $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$

а) Решите уравнение

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\pi; 3\pi/2]$

### Задание 7.

В правильной пирамиде на ребрах АВ и PD взяты точки М и К соответственно, причем  $AM:BM = 1:3$ ,  $DK:PK = 4:3$ . PABCD

а) Докажите, что прямая ВР параллельна плоскости МСК.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью МСК, если известно, что все ребра пирамиды равны 4.

### Задание 8.

Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

- а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?  
 б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?  
 в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

### Задание 9.

Изучите критерии оценивания заданий ЕГЭ по математике (профильный уровень) 17 и 18. Оцените выполнение заданий 17 и 18 обучающимся.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S; 0,7S; 0,4S; 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен:

$$1,25S; 0,875S; 0,5S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0,55S; 0,475S; 0,5S.$$

Наибольшая из выплат должна быть меньше 3 млн рублей:

$$0,55S < 3; S < 5\frac{5}{11}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 5. Значит, искомый размер кредита — 5 млн рублей.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a \text{ имеет ровно три различных корня.}$$

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению  $x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2$  при условии  $x^2 + x - a \geq 0$ .

Решим уравнение  $x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2$ : ;  $x^3 + (1-a)x^2 - ax = 0$ ;  $x(x+1)(x-a) = 0$ , откуда  $x = 0$ ,  $x = -1$  или  $x = a$ .

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие  $x^2 + x - a \geq 0$ .

Рассмотрим условия совпадения корней. При  $a = 0$  и  $a = -1$  уравнение имеет не более двух различных корней. При остальных значениях  $a$  числа  $0$ ,  $-1$ ,  $a$  различны.

При  $x = 0$  получаем:  $x^2 + x - a = -a$ .

Это выражение неотрицательно при  $a \leq 0$ .

При  $x = -1$  получаем:  $x^2 + x - a = -a$ .

Это выражение неотрицательно при  $a \leq 0$ .

При  $x = a$  получаем:  $x^2 + x - a = a^2 \geq 0$  при всех значениях  $a$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при  $a < -1$ ;  $-1 < a < 0$ .

Ответ:  $a < -1$ ;  $-1 < a < 0$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого включением только одной точки $a = 0$ или $a = -1$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-\infty; 0]$ множества значений $a$	2
Получены корни уравнения $x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2$ : $x = 0$ , $x = -1$ , $x = a$ ; и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2 + x - a > 0$ ( $x^2 + x - a \geq 0$ ) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

№ 17.

Год	Сумма долга
I	$125S - x = 0,7S;$
II	$(0,7 \cdot 125S) - y = 0,4S;$
III	$(0,49 \cdot 125S) - z = 0;$

$S$  - сумма кредита. (млн. руб.)  
 $x$  - выплата долга в первый год.  
 $y$  - выплата во второй год.  
 $z$  - выплата в третий год.

По условию,  $x < 3; y < 3; z < 3$ . ~~Найти~~ Найти  $\max S$ .

$$x = 0,55S;$$

$$y = 0,875S - 0,4S = 0,475S;$$

$$z = 0,55S;$$

Отсюда следует, что  $x$  - наибольшая выплата.

$$0,55S < 3$$

$$S < \frac{3}{0,55}$$

$$S < 5,45$$

$$\underline{S = 5.}$$

Ответ: 5.

$$\begin{array}{r} 300 \overline{) 55} \\ - 275 \quad 5,45 \\ \hline 250 \\ - 220 \\ \hline 300 \\ - 275 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$18. \sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = |x^2 + x - a|^2$$

$$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2ax^2 - 2ax + a^2$$

$$2x^3 + 2x^2 - 2ax^2 - 2ax = 0$$

$$x(x^2 + 2x - 2ax - 2a) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2ax - 2a = 0$$

$$D > 0 \quad x^2 + x(2 - 2a) - 2a = 0$$

$$D = 4 - 8a + 4a^2 + 8a = 4 + 4a^2 > 0$$

$$x \neq 0 \quad -2a \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = 2 - 2a$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2a$$

Ответ:  $a + (-a; 0)$

$x = 0$  - корни отрицательности  
-18/11/16.

### **Межпредметная задача**

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?